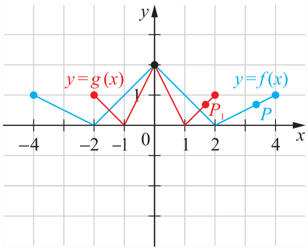
5.5 Wykresy funkcji $y = f(k \cdot x)$, $y = k \cdot f(x)$, $k \in R \setminus \{0\}$

PRZYKŁAD 1.

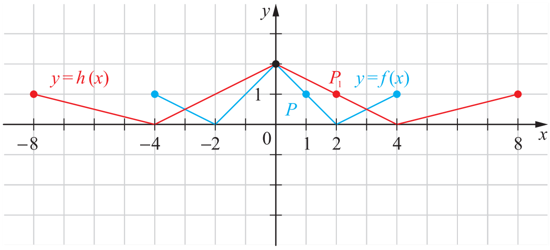
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządźmy wykres funkcji:

a) $g(x) = f(2x)$, b) $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

a) Porównajmy funkcję f z funkcją g. Funkcja g przyjmuje wartości funkcji $y = f(x)$ dla argumentów dwa razy mniejszych. Zatem, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = f(2x)$, należy przekształcić wykres funkcji $y = f(x)$ – zmienić w skali $\frac{1}{2}$ jednostkę na osi x. Każdy punkt $P = (x, y)$ należący do wykresu funkcji f zamieniamy na punkt $P_1 = \left(\frac{x}{2}, y\right)$ należący do wykresu funkcji g.



b) Przy sporządzaniu wykresu funkcji $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ posługujemy się również wykresem funkcji f. Funkcja $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ przyjmuje wartości funkcji f dla argumentów dwa razy większych. Zatem, aby otrzymać wykres funkcji $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, należy przekształcić wykres funkcji $y = f(x)$ – zmienić w skali 2 jednostkę na osi x. Każdy punkt $P = (x, y)$ należący do wykresu funkcji f zamieniamy na punkt $P_1 = (2x, y)$ należący do wykresu funkcji h.



Aby z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = f(k \cdot x)$, $k \neq 0$, należy każdy punkt $P = (x, y)$ wykresu funkcji $y = f(x)$ przekształcić na punkt $P_1 = \left(\frac{x}{k}, y\right)$ należący do wykresu funkcji $y = f(k \cdot x)$, tzn. trzeba przekształcić wykres funkcji $y = f(x)$ poprzez zmianę jednostki na osi x w skali $\frac{1}{k}$.

ĆWICZENIE 1.

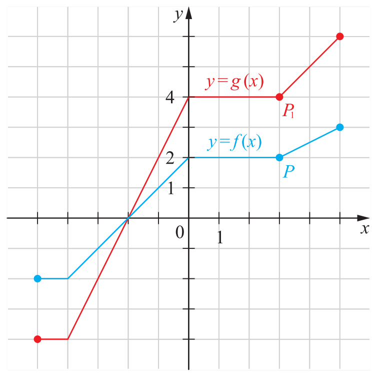
Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ z przykładu 1. naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(3x)$ oraz $h(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$.

PRZYKŁAD 2.

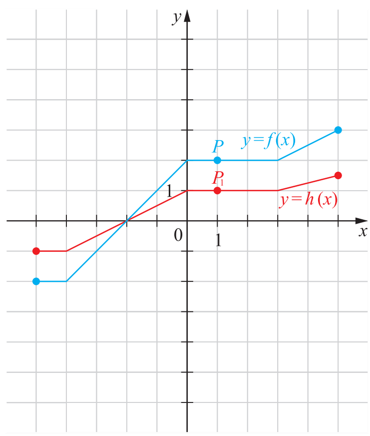
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządźmy wykres funkcji:

a) $g(x) = 2f(x)$, b) $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

a) Porównajmy funkcję f z funkcją g. Funkcja g przyjmuje dla tych samych argumentów dwa razy większe wartości niż funkcja $y = f(x)$. Zatem, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = 2f(x)$, należy przekształcić wykres funkcji $y = f(x)$ – zmienić w skali 2 jednostkę na osi y. Każdy punkt $P = (x, y)$ należący do wykresu funkcji f zamieniamy na punkt $P_1 = (x, 2y)$ należący do wykresu funkcji g.



b) Przy sporządzaniu wykresu funkcji $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$ posługujemy się również wykresem funkcji f.
Funkcja h przyjmuje dla tych samych argumentów dwa razy mniejsze wartości niż funkcja $y = f(x)$. Zatem, aby otrzymać wykres funkcji $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$, należy przekształcić wykres funkcji $y = f(x)$ – zmienić w skali $\frac{1}{2}$ jednostkę na osi y. Każdy punkt $P = (x, y)$ należący do wykresu funkcji f zamieniamy na punkt $P_1 = \left(x, \frac{1}{2}y\right)$ należący do wykresu funkcji h.



Aby z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$, $k \neq 0$, należy każdy punkt $P = (x, y)$ wykresu funkcji $y = f(x)$ przekształcić na punkt $P_1 = (x, ky)$ należący do wykresu funkcji $y = k \cdot f(x)$, tzn. trzeba przekształcić wykres funkcji $y = f(x)$ poprzez zmianę jednostki na osi y w skali k.

ĆWICZENIE 2.

Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ z przykładu 2. naszkicuj wykres funkcji $g(x) = 1{,}5f(x)$ oraz $h(x) = f\left(\frac{1}{4}x\right)$.

R

ZADANIA

1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 3g(x)$, jeżeli:

a) $g(x) = -x$, b) $g(x) = |x|$, c) $g(x) = x^3$, d) $g(x) = \frac{1}{x}$.

Porównaj monotoniczność funkcji f i g. Zapisz wzór otrzymanej funkcji.

2. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{4}g(x)$, jeżeli:

a) $g(x) = x + 1$, b) $g(x) = |2x|$, c) $g(x) = -x^3$, d) $g(x) = \frac{2}{x}$.

Porównaj monotoniczność funkcji f i g. Zapisz wzór otrzymanej funkcji.

3. Funkcja $f(x) = |x + 2|$ określona jest dla $x \in \langle -1;\ 4 \rangle$. Naszkicuj wykres funkcji g. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a) $g(x) = f(3x)$ b) $g(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$ c) $g(x) = 4f(x)$ d) $g(x) = \frac{1}{4}f(x)$

4. Beczka z kranem jest napełniona 100 l wody. Po odkręceniu kranu wypływa z beczki 5 l wody w czasie 1 minuty. Po 10 minutach zakręcono kran na 15 minut, a następnie odkręcono go ponownie.

a) Narysuj wykres funkcji f opisującej ilość wody w beczce w zależności od czasu.

b) Naszkicuj wykres funkcji g opisującej ilość pozostałej wody w beczce, jeżeli z kranu w ciągu minuty wypływa trzy razy więcej wody.

c) Naszkicuj wykres funkcji h opisującej ilość pozostałej wody w beczce, jeżeli z kranu w ciągu minuty wypływa trzy razy mniej wody.

BANK ZADAŃ z. 231–236 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Dana jest funkcja $f(x) = x - 1$, $x \in (-3;\ 3)$. Porównaj własności funkcji $g(x) = 3f(x)$ oraz $h(x) = f(3x)$.

2. Posłuż się wykresem funkcji $f(x) = |2x|$, $x \in \boldsymbol{R}$, i narysuj wykres funkcji:

a) $y = 2f(x)$, b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Porównaj dziedzinę, zbiór wartości i przedziały monotoniczności otrzymanej funkcji oraz funkcji f.

3. Posłuż się wykresem funkcji $f(x) = x^3$, $x \in \langle 0;\ +\infty)$, i naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = f(2x)$, b) $y = f\left(\frac{1}{3}x\right)$.