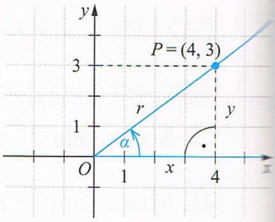
4.2 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

PRZYKŁAD 1.

Obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli punkt $P = (4, 3)$ należy do ramienia końcowego tego kąta.

Oś x, ramię końcowe kąta oraz odcinek prostopadły do osi x o końcu w punkcie P wyznaczają trójkąt prostokątny.



$r = |OP| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Zatem $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$.

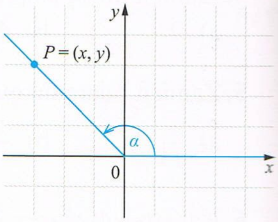
ĆWICZENIE 1.

Uzasadnij, że dla kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych stosunki $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$ i $\frac{y}{x}$ są stałe i nie zależą od wyboru punktu $P = (x, y)$ na ramieniu końcowym kąta.

Określmy funkcje trygonometryczne dowolnego kąta α, gdzie $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$.

Definicja

Niech $P = (x, y)$ będzie dowolnym punktem należącym do ramienia końcowego kąta α, różnym od punktu $(0, 0)$. Wówczas:



$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, gdy $x \neq 0$.

ĆWICZENIE 2.

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli do ramienia końcowego tego kąta należy punkt:

a) $P = (4, 6)$,
b) $P = (-5, 1)$,
c) $P = (-2, -3)$,
d) $P = (6, -3)$.

Znak wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta zależy od położenia jego ramienia końcowego.

Niech punkt $P = (x, y)$ będzie punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta α, umieszczonego w układzie współrzędnych.

Jeśli $0° < \alpha < 90°$, to $x > 0, y > 0$, zatem $\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0, \operatorname{tg}\alpha > 0$.

Jeśli $90° < \alpha < 180°$, to $x < 0, y > 0$, zatem $\sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0, \operatorname{tg}\alpha < 0$.

Jeśli $180° < \alpha < 270°$, to $x < 0, y < 0$, zatem $\sin\alpha < 0, \cos\alpha < 0, \operatorname{tg}\alpha > 0$.

Jeśli $270° < \alpha < 360°$, to $x > 0, y < 0$, zatem $\sin\alpha < 0, \cos\alpha > 0, \operatorname{tg}\alpha < 0$.

W tabeli przypominamy wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów, które były wyznaczane w klasie pierwszej. Miary kątów zostały podane w stopniach i radianach.

α [°]	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0
α [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

PRZYKŁAD 2.

Skorzystajmy z definicji i wyznaczmy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha = 270°$.

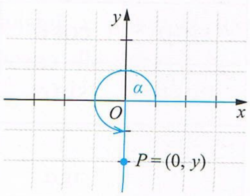
Ramię końcowe kąta α pokrywa się z ujemną półosią osi y.

Zatem punkt $P = (0, y)$, $r = |OP| = |y| = -y$.

$\sin 270° = \frac{y}{r} = \frac{y}{-y} = -1$

$\cos 270° = \frac{x}{r} = \frac{0}{-y} = 0$

$\operatorname{tg} 270° = \frac{y}{x}$ – nieokreślony (nie istnieje)



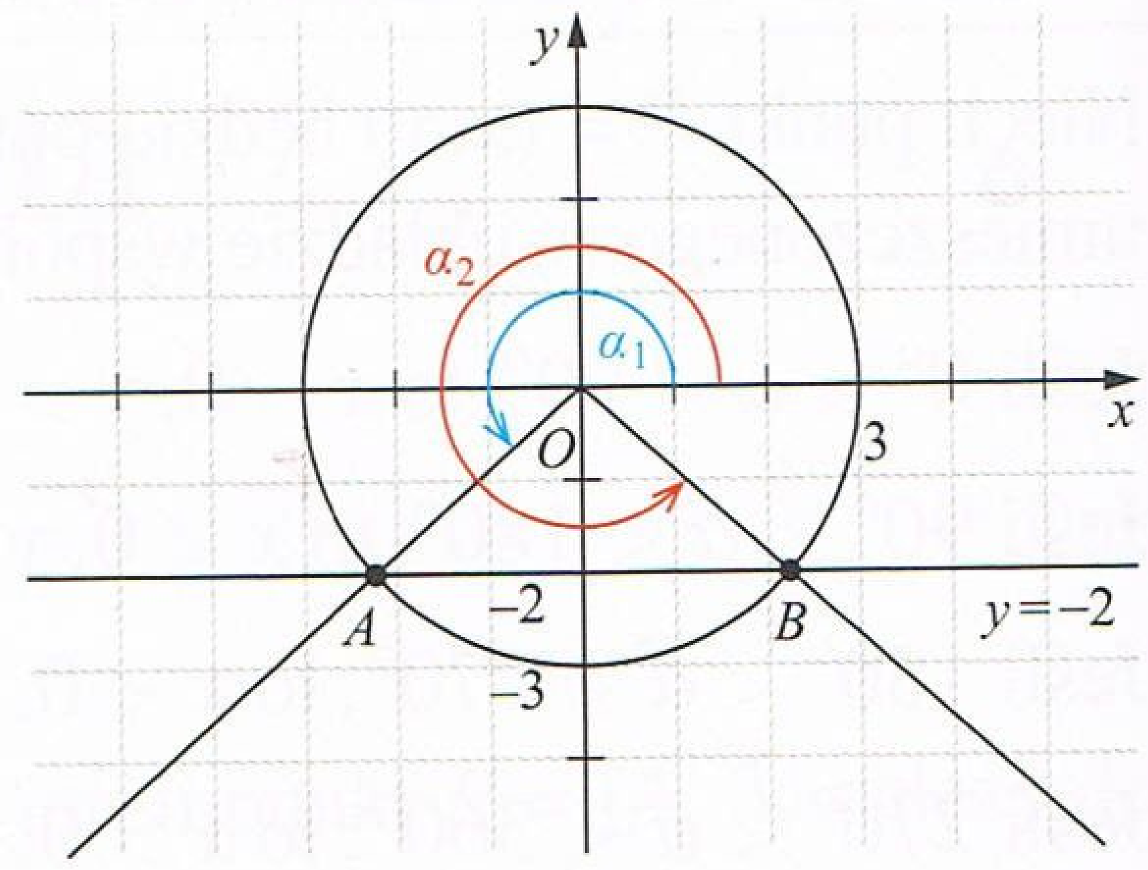
ĆWICZENIE 3.

Skorzystaj z definicji i oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 360°.

PRZYKŁAD 3.

Skonstruujmy taki kąt α, że $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$.

Ponieważ $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $r > 0$, zatem możemy przyjąć, że $y = -2$ oraz $r = 3$. Kreślimy okrąg o środku w punkcie $O = (0, 0)$ i promieniu $r = 3$. Prowadzimy prostą $y = -2$. Punkt przecięcia prostej i okręgu należy do ramienia końcowego kąta. Otrzymujemy dwa kąty spełniające warunki zadania: kąt α_1 o ramieniu końcowym $\overrightarrow{OA}$ i kąt α_2 o ramieniu końcowym $\overrightarrow{OB}$.



Jeżeli $90^\circ < \beta < 360^\circ$ $\left(\frac{\pi}{2} < \beta < 2\pi\right)$, to obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta β sprowadzamy do obliczenia odpowiednich wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, gdzie $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Służą do tego **wzory redukcyjne** podane w tabeli, które konstruujemy według reguły:

- kąt β przedstawiamy w postaci: $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$, $360^\circ - \alpha$, gdzie $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
- ustalamy znak wartości funkcji trygonometrycznej na podstawie znaku funkcji dla danego kąta β (w danej ćwiartce układu współrzędnych);
- jeżeli przed $\pm\alpha$ występuje 180° lub 360°, to rodzaj funkcji się nie zmienia;
- jeżeli przed $\pm\alpha$ występuje 90° lub 270°, to funkcja sinus zamienia się na cosinus, cosinus – na sinus, tangens – na $(\text{tangens})^{-1}$.

	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		IV ćwiartka	
β	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	$-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	$-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
β	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$

Wzory redukcyjne można stosować jedynie dla tych kątów, dla których istnieje wartość danej funkcji trygonometrycznej.

PRZYKŁAD 4.

Skorzystajmy ze wzorów redukcyjnych i obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych.

a) $\sin 135^\circ$ b) $\cos 210^\circ$ c) $\operatorname{tg} \frac{11}{6}\pi$

a) $\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

lub $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

lub $\cos 210^\circ = \cos(270^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg} \frac{11}{6}\pi = \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

lub $\operatorname{tg} \frac{11}{6}\pi = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Podane wzory redukcyjne są prawdziwe nie tylko dla kąta ostrego α. Gdy α jest dowolnym kątem, obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych może odbywać się w kilku etapach. Na przykład:

$\sin(90^\circ - 135^\circ) = \cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ$,

$\sin(90^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$,

$\operatorname{tg}(180^\circ - 175^\circ) = -\operatorname{tg} 175^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 5^\circ) = \operatorname{tg} 5^\circ$.

W praktyce, aby eliminować kilka etapów przekształceń, kąty przedstawiamy w postaci $k \cdot 90^\circ \pm \alpha$, gdzie $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $k \in \boldsymbol{C}$.

Ponieważ położenie ramion w kącie skierowanym $\beta = 360^\circ + \alpha$, gdzie $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, jest identyczne jak w kącie α, więc wartości funkcji trygonometrycznych kąta β są równe wartościom funkcji trygonometrycznych kąta α. Uogólniając: wzory redukcyjne są prawdziwe dla każdego kąta $\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ i $k \in \boldsymbol{C}$.

Zdefiniowanie funkcji trygonometrycznych dla zmiennej rzeczywistej x pozwala na stwierdzenie, że poznane w klasie pierwszej związki trygonometryczne dla danego kąta $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ są również prawdziwe dla zmiennej rzeczywistej x.

Twierdzenie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dla $x \in \boldsymbol{R}$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\right\}$

$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ dla $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\}$

ZADANIA

1. Na ramieniu końcowym kąta α obrano punkt $P = (x, y)$. Wskaż zdania prawdziwe.

A. Jeśli $P = (1, 4)$, to $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = 4$.

B. Jeśli $P = (-3, 2)$, to $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$.

C. Jeśli $P = (-5, -4)$, to $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha = -\frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{5}$.

D. Jeśli $P = (6, -3)$, to $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

2. Zbuduj taki kąt α, że:

a) $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, c) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$.

3. Uzupełnij tabelę.

α	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
α	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$

4. Skorzystaj z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{7}$, $90° < \alpha < 180°$,

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $180° < \alpha < 270°$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $90° < \alpha < 180°$.

5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych.

a) $\sin 480°, \cos 420°$ b) $\operatorname{tg} 390°, \operatorname{tg} 660°$ c) $\cos\frac{8\pi}{3}, \operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}$

6. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $2\sin\frac{31\pi}{6} + \sqrt{2}\cos\frac{15\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$ b) $2\sin 780° + \cos 1035° + 3\operatorname{tg} 405°$

BANK ZADAŃ z. 131–136 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wskaż równości prawdziwe.

A. $\sin\frac{9\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\cos\frac{11\pi}{3} = \frac{1}{2}$

C. $\sin 390^\circ = \frac{1}{2}$ **D.** $\operatorname{tg} 750^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli $\cos\alpha = -\frac{3}{8}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

3. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli do jego ramienia końcowego należy punkt $P = (-4, -3)$.

4. Podaj miary trzech różnych kątów, których wartość funkcji:

a) sinus wynosi $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) cosinus wynosi $-\frac{1}{2}$, c) tangens wynosi $\sqrt{3}$.

5. Zbuduj kąt α, jeśli wiesz, że $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Zad. 6 str. 178

a) $\underbrace{2\sin\frac{31\pi}{6}}+\underbrace{\sqrt{2}\cos\frac{15\pi}{4}}\underbrace{-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}}=\underbrace{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}+\underbrace{\sqrt{2}\ \ldots}-\underbrace{\ldots}$

$\frac{31\pi}{6}=\left(\frac{\cancel{180}^{30}\cdot\frac{31}{\cancel{6}}\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}\right)^{\circ}=930^{\circ}=2\cdot360^{\circ}+210^{\circ}$

$\sin210^{\circ}=\sin(180^{\circ}+30^{\circ})=-\sin30^{\circ}=\underbrace{-\frac{1}{2}}$

$\frac{15\pi}{4}=$ .....

$\cos\ldots$

$\frac{5\pi}{4}=$

$\operatorname{tg}\ldots$