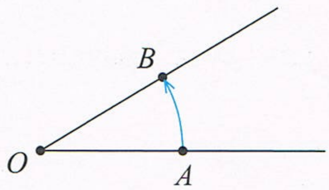
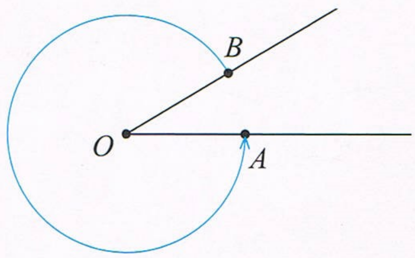
4.1 Miara łukowa kąta

W klasie pierwszej poznaliście pojęcie **kąta skierowanego**, czyli kąta z ustalonym uporządkowaniem ramion. Pierwsze ramię tego kąta to ramię początkowe, a drugie – ramię końcowe. Kąty skierowane oznaczamy łukiem zakończonym strzałką wskazującą ramię końcowe.

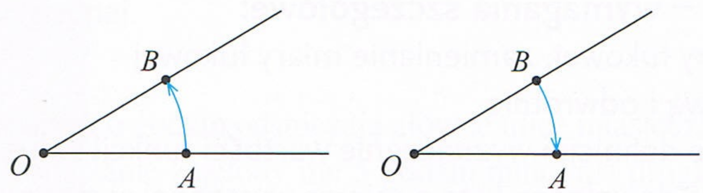


$\sphericalangle AOB$ – kąt skierowany
$OA^{\rightarrow}$ – ramię początkowe
$OB^{\rightarrow}$ – ramię końcowe



$\sphericalangle BOA$ – kąt skierowany
$OB^{\rightarrow}$ – ramię początkowe
$OA^{\rightarrow}$ – ramię końcowe

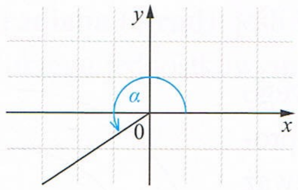
Przyjmujemy, że kąt skierowany zerowy jest kątem zerowym, a kąt skierowany pełny – kątem pełnym. Kąty skierowane wyznaczające ten sam kąt płaski, o ramionach uporządkowanych w odwrotnej kolejności, to **kąty skierowane przeciwnie**.



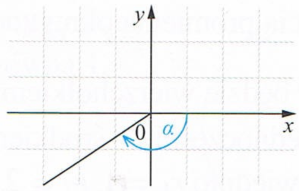
$\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOA$ – kąty skierowane przeciwnie

Miara kąta skierowanego może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne. Zależy to od zwrotu kąta skierowanego, tzn. od kierunku, w którym należy obrócić ramię początkowe kąta, aby otrzymać jego ramię końcowe.

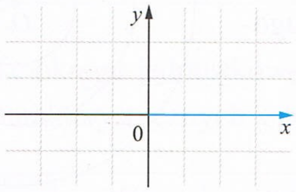
Mówimy, że **kąt skierowany jest umieszczony w układzie współrzędnych**, jeśli jego wierzchołek znajduje się w początku układu współrzędnych, ramię początkowe pokrywa się z dodatnią półosią osi x, a ramię końcowe jest położone w jednej z ćwiartek układu współrzędnych lub zawiera się w osiach układu. Przyjmujemy, że kąt umieszczony w układzie współrzędnych jest **skierowany dodatnio**, jeśli jego ramię końcowe uzyskujemy w wyniku obrotu ramienia początkowego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Jeśli ramię końcowe kąta otrzymujemy w wyniku obrotu jego ramienia początkowego zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to kąt umieszczony w układzie współrzędnych jest **skierowany ujemnie**.



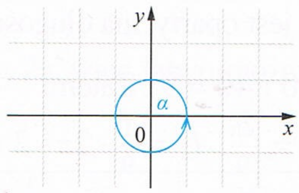
kąt skierowany dodatnio



kąt skierowany ujemnie

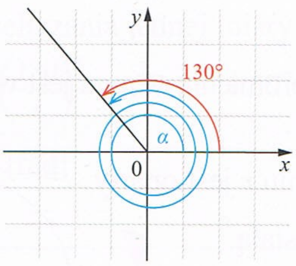


kąt skierowany zerowy

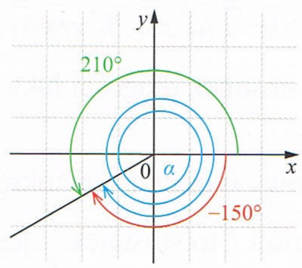


kąt skierowany pełny

Drugie ramię kąta może wykonywać obrót dowolną liczbę razy wokół punktu (0, 0), będącego wierzchołkiem kąta skierowanego.



$\alpha = 2 \cdot 360° + 130° = 850°$



$\alpha = -2 \cdot 360° - 150° = -870°$

Położenie ramion w kącie 850° jest identyczne jak w kącie 130°, a w kącie −870° takie jak w kącie −150° lub 210°.

Kąt α o dowolnej mierze stopniowej można przedstawić w postaci $\alpha = k \cdot 360° + \beta$, gdzie β jest **miarą główną** kąta α i spełnia warunek $0° \leqslant \beta < 360°$ oraz $k \in C$.

ĆWICZENIE 1.

Przedstaw podane kąty w postaci $\alpha = k \cdot 360° + \beta$, gdzie $0° \leqslant \beta < 360°$ i $k \in C$.

a) 500° b) 780° c) −1080° d) 1830°

ĆWICZENIE 2.

Narysuj w układzie współrzędnych kąt o podanej mierze.

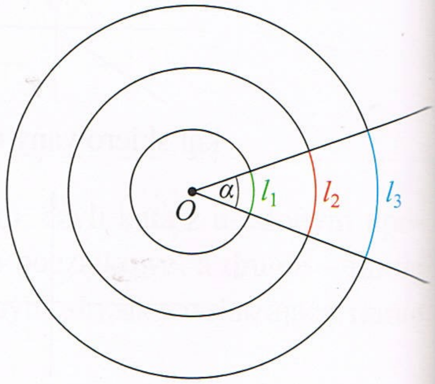
a) 110° b) 320° c) −15° d) −205°

Dotychczas miarę kąta podawaliśmy w stopniach. W zależności od zastosowań miarę kąta możemy podawać w różny sposób. Na przykład łatwiej będzie nam sporządzać wykresy funkcji trygonometrycznych, jeżeli miarą kąta będzie liczba rzeczywista.

PRZYKŁAD 1.

Zbadajmy zależność pomiędzy długością łuku wyznaczonego przez ramiona kąta środkowego a długością promienia okręgu.

Niech punkt O będzie wierzchołkiem kąta środkowego $\alpha = 40^\circ$ oraz jednocześnie – środkiem okręgów o promieniach odpowiednio $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$. Ponieważ miara kąta środkowego jest równa 40°, więc łuk, na którym ten kąt jest oparty, ma długość równą $\frac{1}{9}$ długości okręgu (360 : 40 = 9). Zatem:



$l_1 = \frac{1}{9} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{2\pi}{9}$, $l_2 = \frac{1}{9} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{9}$,

$l_3 = \frac{1}{9} \cdot 2\pi \cdot 3 = \frac{6\pi}{9}$.

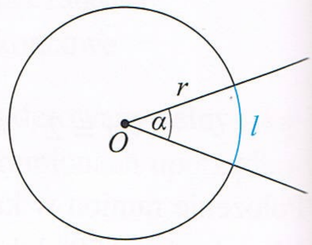
Wówczas:

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{\frac{2\pi}{9}}{1} = \frac{2\pi}{9}, \quad \frac{l_2}{r_2} = \frac{\frac{4\pi}{9}}{2} = \frac{2\pi}{9}, \quad \frac{l_3}{r_3} = \frac{\frac{6\pi}{9}}{3} = \frac{2\pi}{9}.$$

Zauważmy, że stosunek długości łuku do długości promienia okręgu jest wielkością stałą.

Jeśli kąt środkowy o mierze α w okręgu o promieniu r jest oparty na łuku o długości l, to stosunek $\frac{l}{r}$ jest wielkością stałą.

$l = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$, stąd $\frac{l}{r} = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi$



ĆWICZENIE 3.

Oblicz długość łuku l wyznaczonego przez kąt środkowy 120° w okręgu o promieniu:

a) $r = 4$, b) $r = 9$, c) $r = 15$.

W każdym przypadku oblicz stosunek $\frac{l}{r}$.

Definicja

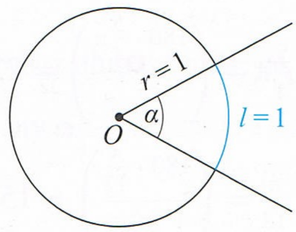
Miarą łukową kąta środkowego nazywamy liczbę α równą stosunkowi długości łuku l okręgu, na którym jest oparty ten kąt, do długości promienia r tego okręgu, czyli $\alpha = \frac{l}{r}$.

Ponieważ ten stosunek nie zależy od długości promienia, przyjmijmy, że $r = 1$. Wtedy $\alpha = l$. Miara łukowa kąta jest więc równa długości łuku, na którym jest oparty kąt środkowy w okręgu jednostkowym (o promieniu 1).

Z miarą łukową kąta jest związane pojęcie radiana.

Kąt ma miarę **1 radiana (1 rad)**, jeśli łuk wyznaczony przez ten kąt na okręgu jednostkowym ma długość równą 1.

$\alpha = 1$ rad



Ponieważ długość okręgu jednostkowego jest równa 2π, więc łatwo możemy wyznaczyć miary łukowe charakterystycznych kątów.

Miara stopniowa	$360°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$
Miara łukowa	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Podstawą do przeliczania jednej miary na drugą jest równość: 2π rad $= 360°$.

$1 \text{ rad} = \dfrac{360°}{2\pi} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57{,}3° = 57°18'$

$1° = \dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180}$ [rad]

Wzory ogólne na przeliczenie miary stopniowej kąta na miarę łukową oraz – miary łukowej na miarę stopniową to:

$$t \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot t}{\pi}\right)^{\circ} \quad \text{oraz} \quad t° = \frac{\pi \cdot t}{180} \text{ [rad]}.$$

Przy podawaniu miary łukowej kąta często zamiast pisać na przykład: kąt o mierze $\frac{\pi}{3}$ rad, piszemy krótko: $\frac{\pi}{3}$.

PRZYKŁAD 2.

Zamieńmy miarę kątów: $270°$, $120°$, $50°$ na miarę łukową.

$270° = \dfrac{\pi \cdot 270}{180} = \dfrac{3}{2}\pi$ [rad]

$120° = \dfrac{\pi \cdot 120}{180} = \dfrac{2}{3}\pi$ [rad]

$50° = \dfrac{\pi \cdot 50}{180} = \dfrac{5}{18}\pi$ [rad]

PRZYKŁAD 3.

Zamieńmy miarę kątów: $\frac{5}{4}\pi$ rad, $\frac{\pi}{12}$ rad, 2 rad na miarę stopniową.

$$\frac{5}{4}\pi = \left(\frac{180 \cdot \frac{5}{4}\pi}{\pi}\right)^\circ = 225^\circ$$

$$\frac{\pi}{12} = \left(\frac{180 \cdot \frac{\pi}{12}}{\pi}\right)^\circ = 15^\circ$$

$$2 = \left(\frac{180 \cdot 2}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ \approx 114{,}6^\circ$$

ZADANIA

1. Wskaż trójki kątów skierowanych, których ramiona końcowe mają takie samo położenie w układzie współrzędnych.

A. 30°, 750°, 1290°
B. 30°, 390°, 750°
C. 210°, 530°, 1290°
D. 210°, 930°, 1290°

2. Kąty o podanych miarach umieszczono w układzie współrzędnych. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P) czy fałszywe (F).

I. Ramię końcowe kąta 490° pokrywa się z ramieniem końcowym kąta -230°. **P / F**

II. Ramię końcowe kąta -260° pokrywa się z ramieniem końcowym kąta 520°. **P / F**

III. Ramię końcowe kąta 1100° znajduje się w I ćwiartce układu współrzędnych. **P / F**

IV. Ramię końcowe kąta -800° znajduje się w IV ćwiartce układu współrzędnych. **P / F**

√**3.** Zamień miarę stopniową kąta na łukową.

a) 5° b) 75° c) 230° d) 325°

√**4.** Zamień miarę łukową kąta na stopniową.

a) $\frac{\pi}{5}$ b) $\frac{3}{8}\pi$ c) $\frac{10}{3}\pi$ d) 4

5. Podaj brakujące miary kątów.

Miara stopniowa	2°	15°		140°		350°	
Miara łukowa			$\frac{\pi}{9}$		$\frac{7}{8}\pi$		$\frac{21}{3}\pi$

6. Wyraź w stopniach i radianach kąt, jaki tworzą wskazówki zegara o godzinie:

a) 8^{00}, b) 16^{00}, c) 8^{30}, d) 14^{15}.

7. W okręgu o promieniu $r = 5$ cm kąt środkowy α jest oparty na łuku o długości 6 cm. Podaj w stopniach oraz radianach miarę kąta α.

8. W okręgu o promieniu $r = 2$ kąt wpisany α ma miarę $\frac{\pi}{10}$. Oblicz długość łuku, jaki wyznacza kąt środkowy oparty na tym samym łuku co kąt wpisany α.

9. Porównaj miary podanych kątów.

a) 2 rad i 2° b) 2 rad i 20°

c) 2 rad i 200° d) 20 rad i 2000°

BANK ZADAŃ z. 126–130 »»»

GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P) czy fałszywe (F).

   I. Miara kąta $2\frac{2}{9}$ rad jest większa od miary łukowej kąta 420°. **P / F**

   II. Miara kąta $\frac{7\pi}{6}$ rad jest równa mierze głównej kąta $\frac{31\pi}{6}$ rad. **P / F**

   III. Miara kąta 3 rad jest równa mierze głównej kąta $(3 + 2\pi)$ rad. **P / F**

   IV. Miara kąta 7 rad jest większa od miary łukowej kąta 700°. **P / F**

2. Narysuj w układzie współrzędnych kąt o podanej mierze.

   a) 150° b) $\frac{5}{3}\pi$ c) -120° d) $-\frac{2}{3}\pi$

3. Przedstaw miarę kąta w postaci $k \cdot 360^\circ + \beta$, gdzie $0^\circ \leqslant \beta < 360^\circ$ i $k \in \mathbf{C}$.

   a) 485° b) 748° c) 1440° d) 2280°

4. Zamień miarę stopniową kąta na łukową.

   a) 9° b) 43° c) 295° d) 415°

5. Zamień miarę łukową kąta na stopniową.

   a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{17}{3}\pi$ c) 5 d) $\sqrt{2}$

6. Kąt środkowy $\alpha = \frac{\pi}{8}$ jest oparty na łuku długości $l = 12$ dm. Oblicz długość promienia okręgu, którego środkiem jest wierzchołek kąta α.