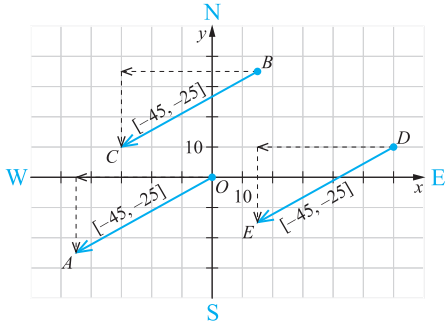
R

4.1 Wektory w układzie współrzędnych

W prostokątnym układzie współrzędnych wektor opisujemy jako parę liczb. Liczby te nazywamy **współrzędnymi wektora** i zapisujemy je w nawiasie kwadratowym.

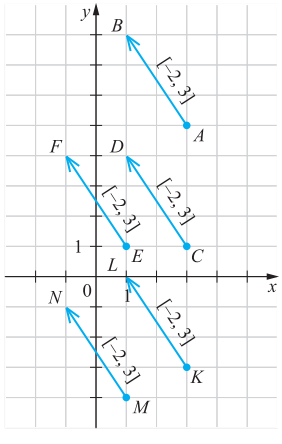
PRZYKŁAD 1.



Oznaczmy osie układu współrzędnych kierunkami geograficznymi i zilustrujmy przesunięcie 45W 25S, czyli 45 jednostek na zachód i 25 jednostek w kierunku południowym. Możemy przemieszczać się w danym kierunku z dowolnego punktu na płaszczyźnie. Jeśli rozpoczniemy z punktu $O = (0, 0)$, to wykonamy przesunięcie wzdłuż osi x w lewo o 45 jednostek i wzdłuż osi y w dół o 25 jednostek. Z punktu O przesuniemy się do punktu $A = (-45, -25)$. Jeśli rozpoczniemy przesunięcie 45W 25S z punktu $B = (15, 35)$, to dotrzemy do punktu $C = (-30, 10)$. Rozpoczęcie przemieszczania w punkcie $D = (60, 10)$ skończymy w punkcie $E = (15, -15)$. Każde z zaznaczonych przesunięć możemy opisać jako parę liczb $[-45, -25]$. O liczbach -45 i -25 mówimy, że są współrzędnymi wektora. Przesunięcie na płaszczyźnie opisujemy graficznie za pomocą wektorów. Para liczb $[-45, -25]$ opisuje wektor w układzie współrzędnych.

PRZYKŁAD 2.

Przedstawmy w układzie współrzędnych wektor $[-2, 3]$.



Rysowanie wektora $[-2, 3]$ rozpoczniemy w dowolnie wybranym punkcie układu współrzędnych. Koniec wektora znajdziemy, jeżeli przesuniemy się z wybranego punktu wzdłuż osi x o 2 jednostki w lewo (ponieważ pierwsza współrzędna wektora jest ujemna, więc przesunięcie jest przeciwne do zwrotu osi x) i wzdłuż osi y o 3 jednostki do góry (ponieważ druga współrzędna wektora jest dodatnia, więc przesunięcie jest zgodne ze zwrotem osi y).

Punkt, w którym rozpoczynamy przesunięcie, nazywamy **początkiem wektora** (są to punkty A, C, E, K, M), punkt zaś,

w którym je kończymy, nazywamy **końcem wektora** (są to odpowiednio punkty B, D, F, L, N). Gdy ustalamy początek i koniec wektora, nadajemy mu odpowiedni **kierunek** i **zwrot**.

Wektor przedstawiony jako para liczb -2 i 3 opisuje rodzinę wektorów równych, które mają taki sam **kierunek** (są równoległe), taką samą długość i zgodny zwrot. Mówimy, że są to **wektory swobodne**. Symbolicznie zapisujemy to jako $\vec{v} = [-2, 3]$ i czytamy „wektor $\vec{v}$ ma współrzędne $-2, 3$”. Wektory swobodne będziemy oznaczać małymi literami alfabetu łacińskiego opatrzonymi strzałkami, np. $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$.

ĆWICZENIE 1.

Naszkicuj w układzie współrzędnych wektory swobodne: $\vec{v} = [4, 4]$, $\vec{w} = [0, -5]$, $\vec{u} = [-3, -2]$, $\vec{t} = [3, 0]$.

Jeżeli obierzemy na płaszczyźnie punkt A jako początek wektora, a punkt B jako koniec wektora, to mówimy, że wektor $\overrightarrow{AB}$ jest **wektorem zaczepionym**.

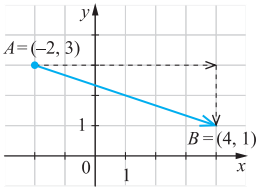
ĆWICZENIE 2.

Wyznacz współrzędne punktu B otrzymanego w wyniku przesunięcia punktu $A = (1, 3)$ o wektor $\vec{v} = [-3, 4]$.

PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli znamy współrzędne jego początku $A = (-2, 3)$ i końca $B = (4, 1)$.

Zastanówmy się, jakie przesunięcia wzdłuż osi x i wzdłuż osi y „prowadzą” z punktu A do punktu B. Z rysunku wynika, że z punktu $A = (-2, 3)$ musimy wykonać przesunięcie w prawo o 6 jednostek i w dół o 2 jednostki. Wówczas znajdziemy się w punkcie $B = (4, 1)$. Zatem wektor $\overrightarrow{AB} = [6, -2]$.



ĆWICZENIE 3.

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (2, -1)$, $B = (-3, 2)$ i $C = (3, 5)$, a następnie wyznacz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$.

Jeśli znamy współrzędne punktów będących początkiem i końcem wektora, to możemy obliczyć współrzędne wektora bez sporządzania rysunku w układzie współrzędnych.

Twierdzenie

Jeśli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne $[x_B - x_A, y_B - y_A]$.
Symbolicznie zapisujemy to jako $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$.

R

PRZYKŁAD 4.

Wyznaczmy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, jeśli $A = (3, 4)$, $B = (0, 4)$, $C = (-5, 6)$.

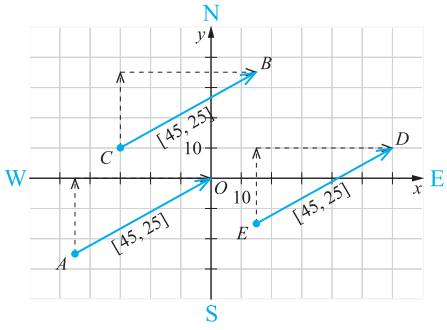
$\overrightarrow{AB} = [0 - 3, 4 - 4] = [-3, 0]$, $\overrightarrow{BC} = [-5 - 0, 6 - 4] = [-5, 2]$,
$\overrightarrow{CA} = [3 - (-5), 4 - 6] = [8, -2]$

ĆWICZENIE 4.

Wyznacz współrzędne wektorów $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{LN}$, jeśli $K = (0, -5)$, $L = (2, 11)$, $M = (-37, 13)$, $N = (0, 100)$.

PRZYKŁAD 5.

W przykładzie 1. przesuwaliśmy się w kierunku 45W 25S. Gdybyśmy podjęli decyzję o powrocie z punktu końcowego do punktu, z którego rozpoczynaliśmy przemieszczanie, to zapisalibyśmy wektor opisujący nasz ruch jako parę liczb [45, 25]. O wektorze [45, 25] powiemy, że jest **wektorem przeciwnym** do wektora [−45, −25].



Twierdzenie

Jeśli wektor $\vec{v} = [v_x, v_y]$, to wektor do niego przeciwny $-\vec{v} = [-v_x, -v_y]$.

Wektory przeciwne mają ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty.

PRZYKŁAD 6.

Wyznaczmy współrzędne punktu A, jeśli mamy dany wektor $\overrightarrow{AB} = [-2, 5]$ oraz punkt $B = (2, 6)$.

Jeśli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (2, 6)$, to wektor $\overrightarrow{AB} = [2 - x_A, 6 - y_A]$.

Z tego wynika, że $\begin{cases} 2 - x_A = -2 \\ 6 - y_A = 5 \end{cases}$.

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $x_A = 4$ i $y_A = 1$. Zatem $A = (4, 1)$.

ĆWICZENIE 5.

Wektor $\overrightarrow{KL} = [0, -7]$. Wyznacz współrzędne punktu:

a) L, jeśli $K = (-9, -12)$,
b) K, jeśli $L = (7, -10)$,
c) L, jeśli $K = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$,
d) K, jeśli $L = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{2}\right)$.

Definicja

Dwa **wektory** $\vec{v} = [v_x, v_y]$ i $\vec{w} = [w_x, w_y]$ są **równe**, gdy ich odpowiednie współrzędne są równe.
$\vec{v} = \vec{w}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_x = w_x$ i $v_y = w_y$.

PRZYKŁAD 7.

Dane są punkty $A = (0, -2)$, $B = (-3, 1)$, $K = (5, 9)$. Znajdźmy współrzędne punktu L tak, aby wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{KL}$ były równe.

Niech $L = (x, y)$.
$\overrightarrow{AB} = [-3, 3]$ oraz $\overrightarrow{KL} = [x - 5, y - 9]$.
Współrzędne punktu L znajdziemy, jeśli skorzystamy z równości wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{KL}$.
Zatem $[-3, 3] = [x - 5, y - 9]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} x - 5 = -3 \\ y - 9 = 3 \end{cases}$, stąd $x = 2, y = 12$.
Ostatecznie punkt $L = (2, 12)$.

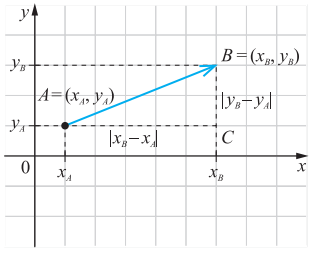
Wektor charakteryzujemy poprzez podanie również jego **długości**, czyli odległości między początkiem a końcem wektora.

PRZYKŁAD 8.

Wyznaczmy długość wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli
$A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$.

Zauważmy, że odcinek AB jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym ABC. Za pomocą twierdzenia Pitagorasa możemy wyznaczyć długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Twierdzenie

Jeśli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest równa

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Jeśli wektor $\vec{v} = [v_x, v_y]$, to jego długość $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

ĆWICZENIE 6.

Wyznacz długość wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli:
a) $A = (-7, 3)$ i $B = (4, 3)$, b) $\overrightarrow{AB} = [0, -5]$, c) $\overrightarrow{AB} = [2, -5]$.

R

ZADANIA

1. Uczestnik rajdu startuje z punktu odległego o 40 km na wschód i 20 km na północ od punktu $O = (0, 0)$. Powinien dotrzeć do trzech kolejnych punktów kontrolnych.
Punkt I – 30E 50N. Punkt II – 90W 0N. Punkt III – 20E 70S.
Opisz za pomocą wektorów trasę rajdu i oblicz jej długość.

2. Przedstaw wektor w układzie współrzędnych.
a) $\vec{x} = [5, 6]$ b) $\vec{w} = [-5, 7]$ c) $\vec{v} = [3, -1]$ d) $\vec{t} = [-3, -6]$

3. Zaznacz wektor w układzie współrzędnych.
a) $\overrightarrow{AB} = [-4, 6]$ i $A = (2, 1)$ b) $\overrightarrow{AB} = [-4, -6]$ i $A = (-3, 2)$
c) $\overrightarrow{AB} = [5, 3]$ i $B = (2, 5)$ d) $\overrightarrow{AB} = [10, -5]$ i $B = (-2, 3)$

4. Uzupełnij tabelę.

A	B	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	$\lvert\overrightarrow{BA}\rvert$
$(2, -4)$	$(3, -5)$				
$(2, -1)$		$[-2, 5]$			
	$(5, -7)$	$[2, 3]$			
$(-4, 2)$			$[2, 5]$		
$(4, 7)$				0	

5. Dane są punkty $A = (-2, 1)$, $B = (3, 4)$ i $C = (-1, 6)$. Wyznacz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.

6. Dane są punkty $K = (-2, 4)$, $L = (2, 4)$, $M = (-3, -2)$. Znajdź współrzędne punktu N tak, aby wektory $\overrightarrow{KL}$ i $\overrightarrow{MN}$ były równe.

7. W układzie współrzędnych zaznacz wektory $\vec{v} = [-3, 2]$ i $\vec{w} = [3, 1]$. Podaj przykłady takich punktów A, B, C, dla których $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$.

BANK ZADAŃ z. 205–206 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli $A = (-2, 3)$ i $B = (2, 6)$.

2. Wyznacz współrzędne punktu A, jeśli wiesz, że $\overrightarrow{AB} = [2, -3]$ i $B = (2, 0)$.

3. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli:
a) $A = (0, -3), B = (4, 0)$, b) $A = (4, -2), B = (-6, 3)$.

4. Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli wiesz, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, $A = (2, 4)$ i $C = (4, 8)$.