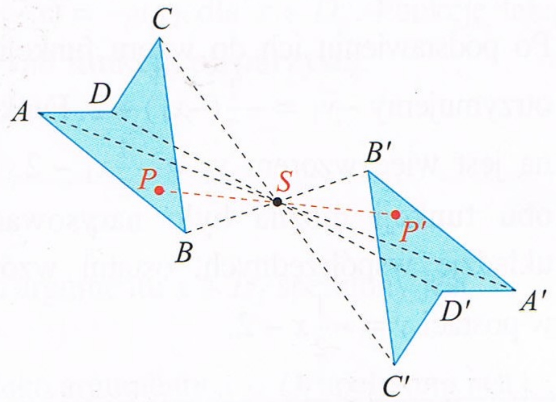
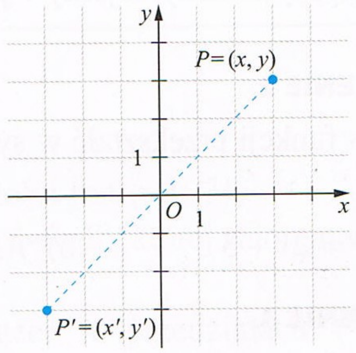
5.2 Symetria względem początku układu współrzędnych

Figury przedstawione na rysunku są figurami **symetrycznymi względem punktu** S. Każdemu punktowi P należącemu do figury $ABCD$ odpowiada punkt P' należący do figury $A'B'C'D'$ taki, że $|PS| = |SP'|$ oraz punkty P, S, P' są współliniowe (tzn. leżą na jednej prostej).



PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy współrzędne punktu $P' = (x', y')$ położonego symetrycznie do punktu $P = (x, y)$ względem początku układu współrzędnych, czyli względem punktu $(0, 0)$.



To, że punkt P' jest obrazem punktu P w symetrii względem początku układu współrzędnych, zapisujemy jako $S_{(0,0)}(P) = P'$. Ponieważ punkty P, O, P' są współliniowe oraz $|PO| = |OP'|$, więc $x' = -x$, $y' = -y$.

Dany jest punkt $P = (x, y)$.
$S_{(0,0)}(P) = P'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P' = (-x, -y)$.

ĆWICZENIE 1.

Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danych względem początku układu współrzędnych.

a) $A = (-5, -3)$ b) $B = (-4, 0)$

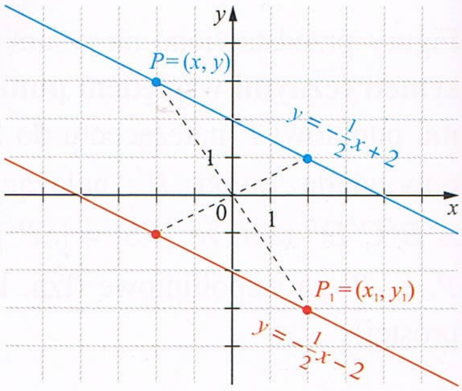
c) $C = \left(\sqrt{7}, \sqrt{2}\right)$ d) $D = \left(-\sqrt[3]{4}, \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)$

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczymy wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y=-\frac{1}{2}x+2$ względem punktu $(0, 0)$.

Między współrzędnymi punktu $P=(x, y)$ należącego do wykresu funkcji $y=f(x)$ oraz współrzędnymi punktu $P_1=\left(x_1, y_1\right)$ należącego do wykresu funkcji $y=g(x)$, otrzymanego w symetrii względem początku układu współrzędnych wykresu funkcji f, zachodzą zależności: $x_1=-x$ i $y_1=-y$, czyli $x=-x_1$ i $y=-y_1$.

Po podstawieniu ich do wzoru funkcji $y=-\frac{1}{2}x+2$ otrzymujemy $-y_1=-\frac{1}{2}(-x_1)+2$. Funkcja g określona jest więc wzorem $y_1=-\frac{1}{2}x_1-2$. Aby wykresy obu funkcji można było narysować w jednym układzie współrzędnych, ostatni wzór zapisujemy w postaci $y=-\frac{1}{2}x-2$.



W wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y=f(x)$ względem początku układu współrzędnych otrzymujemy wykres funkcji $y=-f(-x)$.

ĆWICZENIE 2.

Wykres funkcji przekształć w symetrii względem punktu $(0, 0)$. Napisz wzór otrzymanej funkcji.

a) $f(x)=2x+3$ b) $f(x)=-x-4$ c) $f(x)=|x|$ d) $f(x)=\frac{4}{x}$

ĆWICZENIE 3.

Wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{3}x-4$ przekształć:

a) w symetrii względem osi x, a następnie otrzymany obraz wykresu przekształć w symetrii względem osi y,
b) w symetrii względem punktu $(0, 0)$.

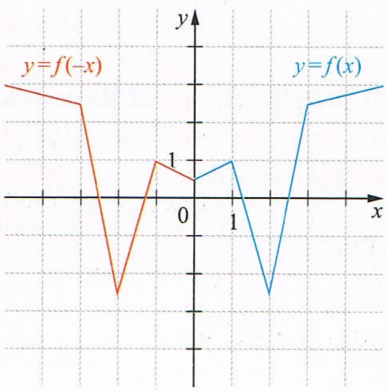
Co zauważasz?

R

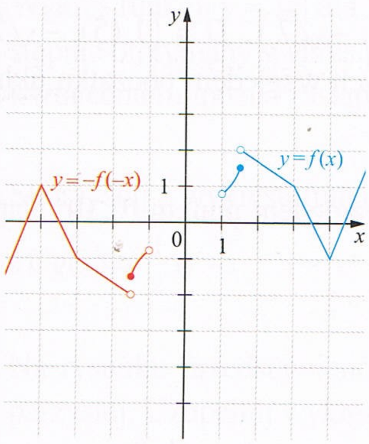
PRZYKŁAD 3.

Przeanalizujmy wykresy funkcji przedstawionych na rysunkach.

a)



$D_f=\langle 0; +\infty)$. Wykres funkcji $y=f(x)$ przekształcamy w symetrii względem osi y. Otrzymujemy wykres funkcji $y=f(-x)$. Wykresy te tworzą wykres funkcji $y=g(x)$. $D_g=\boldsymbol{R}$. Wykres funkcji $y=g(x)$ jest symetryczny względem osi y, zatem dla przeciwnych argumentów x i $-x$ wartości funkcji g są równe. Spełniony jest warunek $g(-x)=g(x)$ dla $x\in D_g$. Funkcję taką będziemy nazywali **funkcją parzystą**. Funkcja parzysta nie jest różnowartościowa.

b) 

$D_f = (1; +\infty)$. Wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcamy w symetrii względem początku układu współrzędnych. Otrzymujemy wykres funkcji $y = -f(-x)$. Wykresy te tworzą wykres funkcji $y = g(x)$.
$D_g = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Wykres funkcji $y = g(x)$ jest symetryczny względem początku układu współrzędnych, więc dla argumentów przeciwnych x i $-x$ wartości funkcji g są liczbami przeciwnymi. Spełniony jest warunek $g(-x) = -g(x)$ dla $x \in D_g$. Funkcję taką będziemy nazywali **funkcją nieparzystą**.

Definicja

Funkcję f nazywamy **parzystą**, jeżeli dla każdego argumentu $x \in D_f$ spełniony jest warunek $-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$.
Funkcję f nazywamy **nieparzystą**, jeżeli dla każdego argumentu $x \in D_f$ spełniony jest warunek $-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$.

ĆWICZENIE 4.

Narysuj wykres dowolnej funkcji:
a) parzystej określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}$, której zbiorem wartości jest $\langle -3; 3 \rangle$,
b) nieparzystej różnowartościowej, określonej w zbiorze $(-8; 8)$, której zbiorem wartości jest $\boldsymbol{R}$,
c) parzystej, określonej w zbiorze $\langle -5; 5 \rangle$, malejącej w przedziałach $\langle -3; -1 \rangle$ oraz $\langle 3; 5 \rangle$.

ZADANIA

1. Wykres funkcji $f(x) = 8 - (x - 1)^3$ przekształcono symetrycznie względem początku układu współrzędnych i otrzymano wykres funkcji g. Funkcję g określa wzór

A. $g(x) = -x^3 + 8$ **B.** $g(x) = (x - 1)^3 + 8$
C. $g(x) = 8 + (x - 1)^3$ **D.** $g(x) = -(x + 1)^3 - 8$

2. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 6x + 9$ oraz $g(x) = (x - 3)^2$. Wykres funkcji g jest wynikiem przekształcenia wykresu funkcji f w symetrii względem

A. osi x. **B.** osi y.
C. początku układu współrzędnych. **D.** osi x, a następnie osi y.

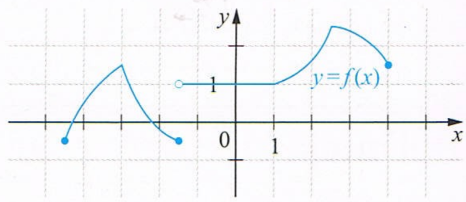
3. Dane są punkty: $A = (3, -4)$, $B = (0, 16)$, $C = \left(\sqrt[3]{5}, -\sqrt{7}\right)$, $D = \left(1{,}(5), -\sqrt{2}\right)$. Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danych względem początku układu współrzędnych.

4. Sporządź wykres funkcji i przekształć go w symetrii względem punktu $(0, 0)$. Napisz wzór otrzymanej funkcji.

a) $y = 6x - 2$ b) $y = -x^2$

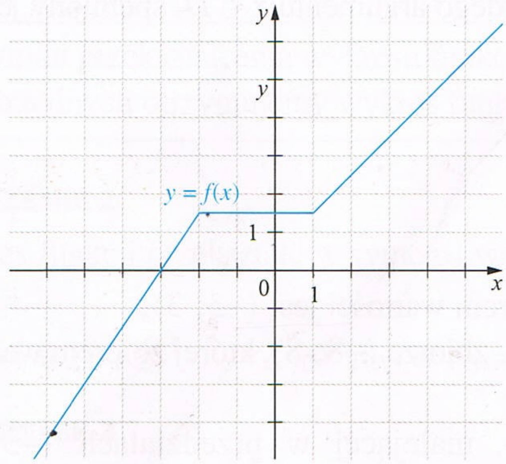
c) $y = 2\sqrt{x}$ d) $y = -x^3$

5. Wykres funkcji f przekształć w symetrii względem punktu $(0, 0)$. Porównaj własności funkcji f oraz funkcji, której wykres otrzymasz po przekształceniu.

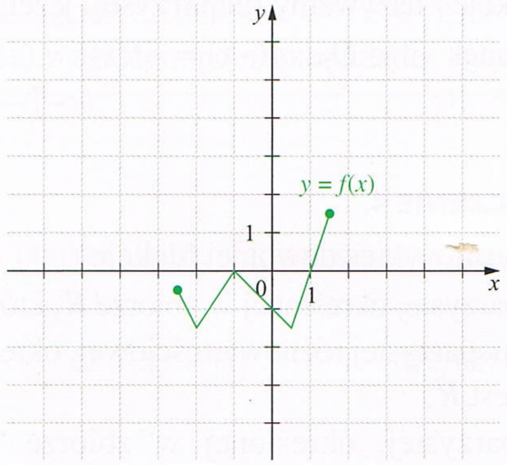


6. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Naszkicuj wykres funkcji $y = -f(-x)$.

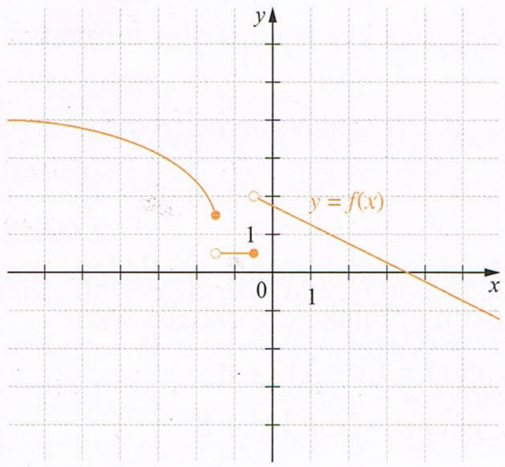
a)



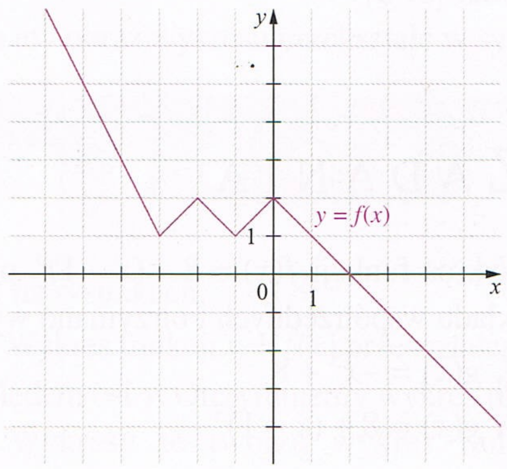
b)



c)



d)



7. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(-x)$. Podaj zbiór argumentów, dla których wartości funkcji f są dodatnie, oraz zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są ujemne.

a) $f(x) = \frac{1}{4}|x|$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = -x^4$ d) $f(x) = \frac{1}{2x}$

8. Wykres funkcji $y = |x|$ dla $x \in \langle -2; +\infty)$ przekształć w symetrii względem osi x, a następnie otrzymany wykres przekształć w symetrii względem osi y. Jakim jednym przekształceniem można zastąpić podane przekształcenia? Uzasadnij odpowiedź.

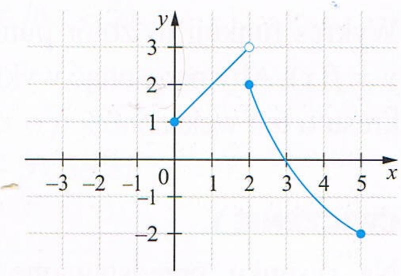
9. Skorzystaj z wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ i naszkicuj wykres funkcji g.

a) $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-x}$ b) $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ c) $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{-x}$

R

10. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji parzystej. Uzupełnij wykres, a następnie przekształć go w symetrii względem:

a) osi x, b) osi y, c) punktu $(0, 0)$.



11. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -1; 6)$, zbiorem wartości – przedział $\langle -2; 5)$, a jej miejscami zerowymi są $x = 0$ i $x = 2$. Podaj dziedzinę, zbiór wartości i miejsca zerowe funkcji g, jeżeli:

a) $g(x) = -f(x)$, b) $g(x) = f(-x)$, c) $g(x) = -f(-x)$.

BANK ZADAŃ z. 219–223 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wykres funkcji $g(x) = \frac{3}{x+1}$ otrzymano po przekształceniu wykresu funkcji f w symetrii względem osi x i ponownym przekształceniu otrzymanego wykresu w symetrii względem osi y. Funkcję f określa wzór

A. $f(x) = \frac{3}{x-1}$ **B.** $f(x) = -\frac{3}{x+1}$ **C.** $f(x) = -\frac{3}{x-1}$ **D.** $f(x) = -\frac{-3}{x-1}$

2. Dane są punkty $A = (7, -9)$, $B = (-4, -10)$, $C = (17, 0)$. Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danych względem początku układu współrzędnych.

3. Narysuj wykres dowolnej funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -5; 4\rangle$, a zbiorem wartości – przedział $\langle -3; 4\rangle$. Przekształć ten wykres w symetrii względem początku układu współrzędnych.

4. Wyznacz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = 12x - 2{,}3$ względem punktu $(0, 0)$.

5. Skorzystaj z wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ i naszkicuj wykres funkcji $y = -f(-x)$.

R

6. Wykres funkcji $y = -\sqrt[3]{x} + 5$ jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$ do wykresu funkcji $y = f(x)$. Jakim wzorem określona jest funkcja f?