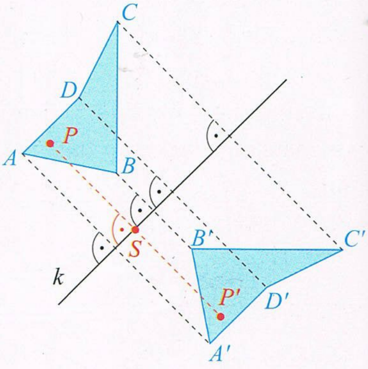
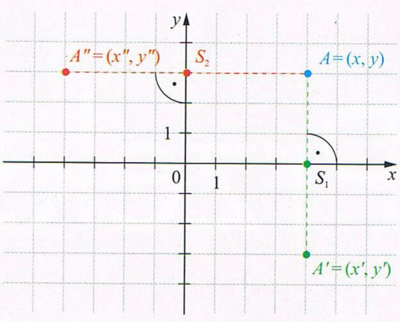
5.1 Symetria względem osi układu współrzędnych

Figury pokazane na rysunku to **figury symetryczne względem prostej** k. Każdemu punktowi P figury $ABCD$ odpowiada punkt P' należący do figury $A'B'C'D'$ taki, że $|PS| = |SP'|$, $S \in k$ oraz odcinek PP' jest prostopadły do prostej k.



PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy współrzędne punktu symetrycznego do punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi x oraz w symetrii względem osi y układu współrzędnych.



Punkt $A' = (x', y')$ jest obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi x, co zapisujemy jako $A' = S_x(A)$. Ponieważ odcinek AA' jest prostopadły do osi x oraz $|AS_1| = |S_1A'|$, więc $x' = x$, $y' = -y$. Pierwsze współrzędne punktów A i A' są równe, a drugie współrzędne są liczbami przeciwnymi.
Punkt $A'' = (x'', y'')$ jest obrazem punktu $A = (x, y)$ w symetrii względem osi y, co zapisujemy jako $A'' = S_y(A)$. Ponieważ odcinek AA'' jest prostopadły do osi y oraz $|AS_2| = |S_2A''|$, więc $x'' = -x$, $y'' = y$. Pierwsze współrzędne punktów A i A'' są liczbami przeciwnymi, a drugie współrzędne są takie same.

Dany jest punkt $A = (x, y)$.
$S_x(A) = A'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A' = (x, -y)$.
$S_y(A) = A''$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A'' = (-x, y)$.

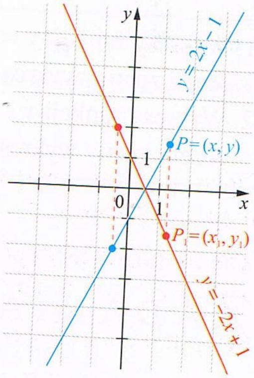
ĆWICZENIE 1.

Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danych względem osi x oraz osi y.
a) $A = (-3, 4)$ b) $B = (-4, 0)$ c) $C = (0, -2)$ d) $D = (0, 0)$

PRZYKŁAD 2.

Wyznaczmy wzór funkcji, której wykres jest symetryczny względem osi x do wykresu funkcji $y = 2x - 1$.

Punkt $P = (x, y)$ należący do wykresu funkcji $y = 2x - 1$ przekształćmy w symetrii względem osi x na punkt $P_1 = (x_1, y_1)$. Między współrzędnymi punktów P i P_1 zachodzą następujące zależności: $x_1 = x$ oraz $y_1 = -y$, stąd $y = -y_1$.
Po podstawieniu tych zależności do wzoru funkcji $y = 2x - 1$ otrzymujemy: $-y_1 = 2x_1 - 1$, czyli $y_1 = -2x_1 + 1$. Aby wykresy obu funkcji można było narysować w jednym układzie współrzędnych, ostatni wzór zapisujemy w postaci $y = -2x + 1$.
Otrzymaliśmy więc wzór funkcji $y = -2x + 1$, której wykres powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = 2x - 1$ w symetrii względem osi x.



ĆWICZENIE 2.

Przekształć w symetrii względem osi x wykres funkcji f. Podaj wzór otrzymanej funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ b) $f(x) = x^2$

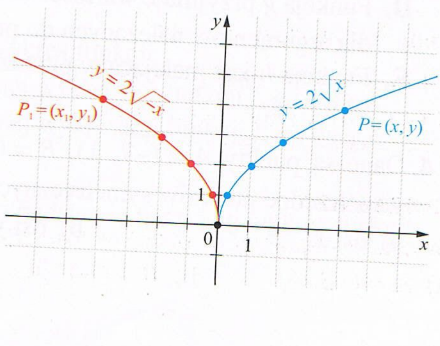
PRZYKŁAD 3.

Wyznaczmy wzór funkcji, której wykres jest symetryczny względem osi y do wykresu funkcji $y = 2\sqrt{x}$.

Dziedziną funkcji $y = 2\sqrt{x}$ jest zbiór $\langle 0; +\infty)$. Punkt $P = (x, y)$ należący do wykresu funkcji przekształcamy w symetrii względem osi y na punkt $P_1 = (x_1, y_1)$. Między współrzędnymi punktów P i P_1 zachodzą następujące zależności: $x_1 = -x$, stąd $x = -x_1$, oraz $y_1 = y$. Po podstawieniu x oraz y do wzoru funkcji f otrzymujemy $y_1 = 2\sqrt{-x_1}$. Aby wykresy obu funkcji można było narysować w jednym układzie współrzędnych, ostatni wzór zapisujemy w postaci $y = 2\sqrt{-x}$. Dziedziną otrzymanej funkcji jest zbiór $(-\infty; 0\rangle$. W naszkicowaniu wykresów funkcji pomogą nam tabelki wartości funkcji.

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	4
$y = 2\sqrt{x}$	0	1	2	$2\sqrt{2}$	4

x	−4	−2	−1	$-\frac{1}{4}$	0
$y = 2\sqrt{-x}$	4	$2\sqrt{2}$	2	1	0



ĆWICZENIE 3.

Przekształć w symetrii względem osi y wykres funkcji f. Podaj wzór otrzymanej funkcji.

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = x^3$

1. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = -f(x)$ są wzajemnie symetryczne względem osi x. Jeżeli znamy wykres funkcji $y = f(x)$, możemy naszkicować wykres funkcji $y = -f(x)$.
2. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ są wzajemnie symetryczne względem osi y. Jeżeli znamy wykres funkcji $y = f(x)$, możemy naszkicować wykres funkcji $y = f(-x)$.

ZADANIA

1. Wykres funkcji $f(x) = -2\sqrt{-x} + 3$ przekształcono symetrycznie względem osi x, w wyniku czego otrzymano wykres funkcji g. Funkcję g określa wzór

A. $g(x) = 2\sqrt{-x} - 3$ **B.** $g(x) = -2\sqrt{x} - 3$

C. $g(x) = 2\sqrt{-x} + 3$ **D.** $g(x) = 2\sqrt{x} + 3$

2. Dane są funkcje $g(x) = -x^3 + 2$ oraz $h(x) = -x^3 - 2$. Wykres funkcji g otrzymano po przekształceniu symetrycznym wykresu funkcji f względem osi x, natomiast wykres funkcji h – po przekształceniu symetrycznym wykresu funkcji f względem osi y. Wzór funkcji f to

A. $f(x) = x^3 + 2$ **B.** $f(x) = (x - 1)^3 + 2$

C. $f(x) = x^3 - 2$ **D.** $f(x) = -(x + 1)^3 + 2$

3. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 9$. Po przekształceniu jej wykresu w symetrii względem osi x otrzymano wykres funkcji g. Natomiast po przekształceniu wykresu funkcji f w symetrii względem osi y otrzymano wykres funkcji h. Połącz w pary podane informacje tak, aby zdania były prawdziwe.

A. Funkcję g opisuje wzór
B. Funkcję h opisuje wzór
C. Funkcja g jest malejąca w przedziale
D. Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów należących do przedziału
E. Funkcja h jest malejąca w przedziale

I. $(-3;\ 3)$
II. $x^2 - 9$
III. $(-\infty;\ 0\rangle$
IV. $\langle 0;\ +\infty)$
V. $-x^2 + 9$

4. Dane są punkty $A = (-7, 1)$, $B = (4, -4)$, $C = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $D = \left(\pi, \frac{1}{2}\right)$. Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do danych względem:

a) osi x, b) osi y.

5. Sporządź wykres funkcji i odbij go symetrycznie względem osi x. Napisz wzór otrzymanej funkcji.

a) $y = -3x - 5$ b) $y = -2x^2$

c) $y = 2|x|$ d) $y = -x^3$

6. Wykres danej funkcji przekształć symetrycznie względem osi y. Podaj wzór otrzymanej funkcji.

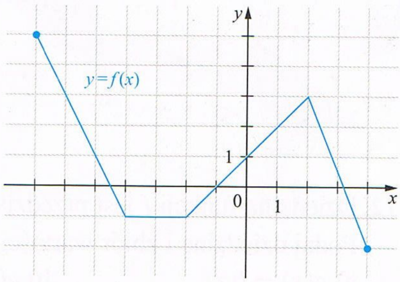
a) $y = \pi x - 1{,}5$ b) $y = 3x^2 + 2$

c) $y = -3|x| + x$ d) $y = -x^3 + x$

7. Przedstawiony na rysunku wykres funkcji f przekształć w symetrii względem:

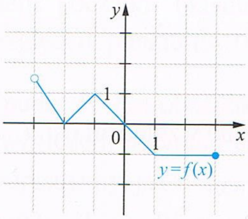
a) osi x, b) osi y.

Podaj przedziały monotoniczności funkcji f oraz funkcji, której wykres otrzymasz po wykonaniu przekształcenia.

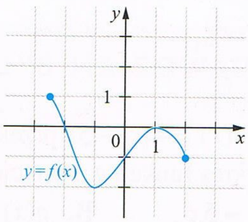


8. Dany jest wykres funkcji f. Naszkicuj wykresy funkcji $y = f(-x)$ i $y = -f(x)$.

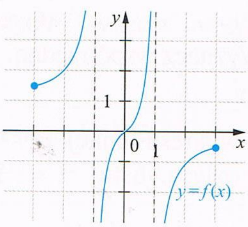
a)



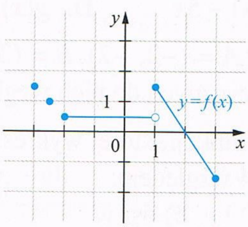
b)



c)



d)



9. Dana jest funkcja $f(x) = -2x + 6$. Naszkicuj wykres funkcji:

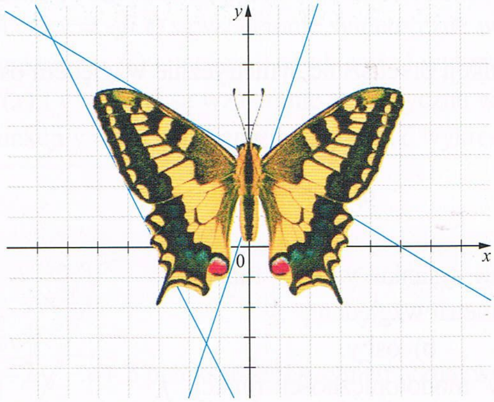
a) $g(x) = -f(x)$. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji f, g i osią y.

b) $h(x) = f(-x)$. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji f, h i osią x.

10. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 3\sqrt{x}$ i na jego podstawie naszkicuj wykres funkcji:

a) $g(x) = -3\sqrt{x}$, b) $h(x) = 3\sqrt{-x}$.

11. Lewe skrzydło motyla ograniczają proste będące wykresami funkcji $y = -\frac{3}{5}x + 3$, $y = 3x + 1$ oraz $y = -2x - 6$. Przyjmij, że rysunek motyla jest figurą symetryczną względem osi y i wyznacz równania prostych ograniczających prawe skrzydło motyla.



12. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -4; 5)$, a jej zbiorem wartości – przedział $\langle -3; 6)$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g, jeżeli:

a) $g(x) = f(x)$, b) $g(x) = -f(x)$, c) $g(x) = f(-x)$.

BANK ZADAŃ z. 215–218 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wykres funkcji $f(x) = 4|x| - 5x$ przekształcono symetrycznie względem osi y i otrzymano wykres funkcji g. Funkcję g określa wzór

A. $g(x) = 4|x| - 5x$ **B.** $g(x) = 4|x| + 5x$

C. $g(x) = -4|x| - 5x$ **D.** $g(x) = -4|x| + 5x$

2. Dane są punkty $A = (-2, -2)$, $B = (3, 6)$, $C = (-5, 0)$. Wyznacz współrzędne punktów symetrycznych do nich względem osi x oraz osi y.

3. Wyznacz wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x) = -10x + 4$ względem:

a) osi x, b) osi y.

4. Skorzystaj z wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$ i naszkicuj wykresy funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$.

5. Wykres funkcji $y = 2x + 9$ jest symetryczny względem osi x do wykresu funkcji $y = f(x)$ oraz symetryczny do wykresu funkcji $y = g(x)$ względem osi y. Podaj wzory funkcji f i g.