3.5 Rozwiązywanie nierówności wymiernych

Definicja

Każdą nierówność postaci $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$, w której f i g są wielomianami zmiennej x oraz g nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **nierównością wymierną**.

Rozwiązywanie nierówności wymiernych rozpoczynamy od ustalenia ich dziedziny.

PRZYKŁAD 1.

Rozwiążmy nierówność $\frac{3}{x-2} < 0$.

Nierówność ma sens liczbowy, gdy $x \neq 2$. Ponieważ licznik jest równy 3, więc wyrażenie wymierne przyjmuje wartości ujemne wtedy, gdy mianownik jest ujemny.
Rozwiązanie tej nierówności możemy otrzymać z koniunkcji $x - 2 < 0$ i $x \neq 2$.
Zbiór rozwiązań nierówności stanowią $x \in (-\infty; 2)$.

PRZYKŁAD 2.

Rozwiążmy nierówność $\frac{2x-1}{3x+2} \geqslant 0$.

Nierówność ma sens liczbowy, gdy $x \neq -\frac{2}{3}$.

I sposób

Wyrażenie wymierne przyjmuje wartości nieujemne w poniższych dwóch przypadkach.

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ 3x+2 > 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2x-1 \leqslant 0 \\ 3x+2 < 0 \end{cases}$$

W obu przypadkach uwzględniliśmy dziedzinę nierówności.

Otrzymujemy: $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x \leqslant \frac{1}{2} \\ x < -\frac{2}{3} \end{cases}$.

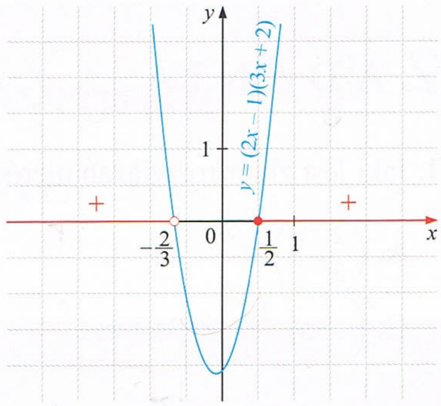
Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left\langle \frac{1}{2}; +\infty\right)$.

II sposób

Jeśli iloraz dwóch liczb jest liczbą nieujemną, to iloczyn tych liczb również jest liczbą nieujemną. Możemy więc zastąpić nierówność wymierną układem:

$$\begin{cases}(2x-1)(3x+2) \geqslant 0 \\ 3x+2 \neq 0\end{cases}$$

Odwołujemy się do wykresu funkcji
$y = (2x-1)(3x+2)$.
Rozwiązaniem nierówności jest zbiór
$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left\langle \frac{1}{2}; +\infty\right)$.



III sposób

Nierówność $\frac{2x-1}{3x+2} \geqslant 0$ sprowadzamy do nierówności wielomianowej.

$\frac{2x-1}{3x+2} \geqslant 0 \quad | \cdot (3x+2)^2$

$(2x-1)(3x+2) \geqslant 0$

Mamy pewność, że dla $x \neq -\frac{2}{3}$ wyrażenie po lewej stronie nierówności będzie przyjmowało wartości dodatnie (zwrot nierówności się nie zmienia).

Odwołujemy się do wykresu funkcji $y = (2x-1)(3x+2)$. Pamiętamy o założeniu, że $x \neq -\frac{2}{3}$ (patrz wykres powyżej).

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left\langle \frac{1}{2}; +\infty\right)$.

ĆWICZENIE 1.

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2}{x+4} \geqslant 0$ b) $\frac{x-4}{x+1} \leqslant 0$ c) $\frac{-x}{2x+2} > 0$

PRZYKŁAD 3.

Rozwiążmy nierówność $\frac{2}{x} \leqslant \frac{4-x}{x^2}$.

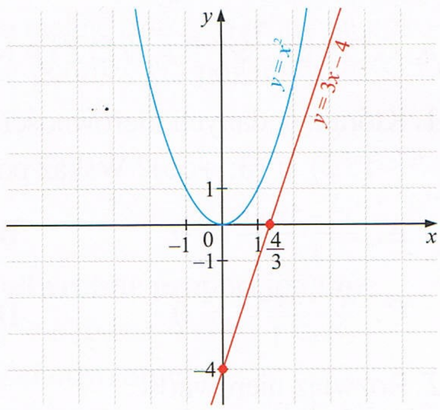
Nierówność zapisujemy w postaci $\frac{2}{x} - \frac{4-x}{x^2} \leqslant 0$.

Ma ona sens liczbowy, gdy $x \neq 0$.

$\frac{2x}{x^2} - \frac{4-x}{x^2} \leqslant 0$

$\frac{2x-(4-x)}{x^2} \leqslant 0$

$\frac{3x-4}{x^2} \leqslant 0$



Odwołujemy się do wykresów funkcji $y = 3x - 4$ i $y = x^2$.

Odczytujemy rozwiązanie: $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right\rangle$.

ĆWICZENIE 2.

Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2x}{x-1} > \frac{4}{3x-3}$ b) $\frac{4x+8}{x^2+2} < 0$ c) $\frac{2x-5}{x^2-4} \geqslant 0$

ZADANIA

1. Jaki jest zbiór rozwiązań nierówności $\frac{2x+1}{3x-2} \leqslant 1$? Wskaż poprawną odpowiedź.

A. $\left(\frac{2}{3}; 3\right\rangle$

B. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right\rangle \cup \langle 3; +\infty)$

C. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (3; +\infty)$

D. $\boldsymbol{R} \setminus \left\langle\frac{2}{3}; 3\right)$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x-5}{x-3} > 0$ b) $\frac{3}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+1}$ c) $\frac{1}{x-1} < \frac{x}{3-x}$

3. Wyznacz wszystkie wartości x, dla których jest spełniony podany warunek.

a) $\frac{1}{x^2-5x+6} \geqslant \frac{1}{2}$ b) $\frac{x}{(2-3x)(1+x)} > 0$ c) $\frac{x(x+2)}{x-3} < x+1$

4. Wskaż liczby naturalne należące do zbioru rozwiązań nierówności.

a) $\frac{2}{1-x} + 1 \leqslant \frac{3}{x+2}$ b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} < 2$ c) $\frac{2}{x} - 1 > \frac{3}{x+1}$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{(2x-4)(x+1)}{(x-2)(x+3)} \leqslant 0$ b) $\frac{2}{x} - 3x > 1$ c) $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$

BANK ZADAŃ z. 109–113 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Którą z podanych nierówności spełniają liczby należące do sumy przedziałów $(-1; 2\rangle \cup \langle 3; +\infty)$? Wskaż poprawne odpowiedzi.

A. $\frac{x^2-5x+6}{x+1} \geqslant 0$

B. $\frac{(2-x)(x-3)}{x+1} \leqslant 0$

C. $\frac{x^2-5x+6}{x+1} > 0$

D. $\frac{(2-x)(x-3)}{-x-1} \geqslant 0$

2. Rozwiąż nierowność.

a) $\frac{x+2}{x-4} < 0$ b) $2x > \frac{1}{x}$ c) $\frac{1}{x-2} \leqslant \frac{2}{2x+1}$

3. Znajdź zbiór rozwiązań nierówności.

a) $\frac{1}{x^2+3x} > 0$ b) $\frac{2x+7}{x-4} \leqslant 3$ c) $\frac{x^3}{(x+2)(x+3)^2} < 0$