3.4 Rozwiązywanie równań wymiernych

Definicja

Równanie postaci $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, gdzie f i g są wielomianami zmiennej x oraz g nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **równaniem wymiernym**.

Rozwiązywanie równań wymiernych rozpoczynamy od ustalenia ich dziedziny.

PRZYKŁAD 1.

Rozwiążmy równanie.

a) $\frac{x^2+4x-5}{x-1} = 0$ b) $\frac{x}{x-5} = \frac{x-2}{x-6}$

a) Dziedzina: zbiór $\boldsymbol{R} \setminus \{1\}$. W tym zbiorze równanie jest równoważne równaniu $x^2+4x-5=0$, stąd $x_1=-5$, $x_2=1$. Tylko -5 należy do dziedziny równania wymiernego, zatem równanie ma jedno rozwiązanie: $x=-5$.

b) Dziedzina: zbiór $\boldsymbol{R} \setminus \{5, 6\}$.

I sposób

Równanie zapisujemy w postaci równoważnej.

$\frac{x}{x-5} - \frac{x-2}{x-6} = 0$ Sprowadzamy wyrażenia do wspólnego mianownika.

$\frac{x(x-6)}{(x-5)(x-6)} - \frac{(x-2)(x-5)}{(x-5)(x-6)} = 0$ Wykonujemy działania wskazane w liczniku.

$\frac{x-10}{(x-5)(x-6)} = 0$

$\frac{x-10}{(x-5)(x-6)} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x-10=0$ i $x \neq 5$ i $x \neq 6$.

Po uwzględnieniu dziedziny stwierdzamy, że rozwiązaniem równania jest $x=10$.

II sposób

Zauważmy, że równanie $\frac{x}{x-5} = \frac{x-2}{x-6}$ ma postać proporcji.

Odwołujemy się do własności proporcji (iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych) i zapisujemy to równanie w postaci równoważnej

$x(x-6) = (x-2)(x-5)$ oraz $x \neq 5$ i $x \neq 6$.

Kolejne przekształcenia:

$x^2 - 6x = x^2 - 5x - 2x + 10$

$-6x + 5x + 2x = 10$

prowadzą do rozwiązania $x = 10$.

ĆWICZENIE 1.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+1}$ b) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-3}$ c) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-5}{x-3}$

PRZYKŁAD 2.

Rozwiążmy równanie $\frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$.

Dziedzina: zbiór $\boldsymbol{R} \setminus \{2\}$.

Wykonujemy konieczne działania.

$$\frac{1}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} = \frac{3-x}{x-2}$$

$$\frac{1+3x-6}{x-2} = \frac{3-x}{x-2}$$

$$\frac{3x-5}{x-2} = \frac{3-x}{x-2}$$

Uzyskaliśmy równość dwóch ułamków, których mianowniki są takie same. Zatem ich liczniki też muszą być równe.

$3x - 5 = 3 - x$, stąd $x = 2$

Liczba 2 nie może być rozwiązaniem tego równania, ponieważ wyrażenie wymierne nie ma sensu liczbowego dla $x = 2$.

Zatem równanie nie ma rozwiązania.

ĆWICZENIE 2.

Wykaż, że równanie nie ma rozwiązania.

a) $5 + \frac{1}{x-4} = \frac{5-x}{x-4}$ b) $\frac{1}{x-5} + 6 = \frac{6-x}{x-5}$ c) $\frac{8-x}{x-7} = 8 + \frac{1}{x-7}$

ĆWICZENIE 3.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x+5}{4x-3} = \frac{3x+3}{7-x}$ b) $\frac{x-3}{x+2} = \frac{3x-7}{x+5}$ c) $\frac{5-x}{2x-1} = \frac{15-4x}{3x+1}$

PRZYKŁAD 3.

Rozwiążmy równanie $x^2 + x + \frac{12}{x^2+x} = 8$.

Dziedzina: zbiór $\boldsymbol{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = x^2 + x$.

Równanie przyjmuje postać $t + \frac{12}{t} = 8$ i $t \neq 0$.

Przekształcamy to równanie do postaci $\frac{t^2+12}{t} = 8$, stąd $t^2 + 12 = 8t$. Równanie kwadratowe $t^2 - 8t + 12 = 0$ ma dwa rozwiązania: $t_1 = 2$ i $t_2 = 6$, oba spełniają warunek $t \neq 0$. Wracamy do podstawienia $x^2 + x = t$ i otrzymujemy $x^2 + x = 2$ lub $x^2 + x = 6$. Rozwiązania tych równań tworzą zbiór $\{-3, -2, 1, 2\}$. Wszystkie liczby z tego zbioru należą do dziedziny wyjściowego równania wymiernego, zatem zbiór rozwiązań równania $x^2 + x + \frac{12}{x^2+x} = 8$ to $\{-3, -2, 1, 2\}$.

ĆWICZENIE 4.

Rozwiąż równanie $\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{4}{x}\right) + 20 = 0$.

PRZYKŁAD 4.

Rozwiążmy równanie $\frac{1}{(3-2x)^2} - \frac{3}{9-4x^2} = \frac{4}{(3+2x)^2}$.

Dziedzina: $x \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

Równanie po rozkładzie wielomianów z mianownika na czynniki przyjmuje poniższą postać.

$$\frac{1}{(3-2x)^2} - \frac{3}{(3-2x)(3+2x)} = \frac{4}{(3+2x)^2}$$

Sprowadzamy lewą stronę równania do wspólnego mianownika.

$$\frac{1\cdot(3+2x)}{(3-2x)^2(3+2x)} - \frac{3\cdot(3-2x)}{(3-2x)^2(3+2x)} = \frac{4}{(3+2x)^2}$$

Wykonujemy wskazane działania.

$$\frac{8x-6}{(3-2x)^2(3+2x)} = \frac{4}{(3+2x)^2}$$

Stosujemy regułę proporcji.

$$(8x-6)(3+2x)^2 = 4(3-2x)^2(3+2x) \quad | : (3+2x)$$

Dzielenie jest możliwe, ponieważ $3 + 2x \neq 0$.

$$(8x-6)(3+2x) = 4(3-2x)^2$$

$$12x + 48x = 36 + 18$$

$$60x = 54, \text{ stąd } x = \frac{9}{10}.$$

Po uwzględnieniu dziedziny stwierdzamy, że rozwiązaniem równania wymiernego jest $\frac{9}{10}$.

ĆWICZENIE 5.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{4x+8} = \frac{20x+1}{4x^2-16} - \frac{7-5x}{x^2-4x+4}$

b) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0$

PRZYKŁAD 5.

Rozwiążmy równanie.

a) $\frac{6}{|x-2|} = 2$

b) $\left|\frac{3x-1}{2-x}\right| = 2$

c) $\frac{x}{|x+2|} = 2 - \frac{1}{x}$

a) Dziedzina: $x \neq 2$.

Równanie przekształcamy do postaci $|x - 2| = 3$, stąd $x - 2 = 3$ lub $x - 2 = -3$. Zatem zbiór rozwiązań tego równania to $\{-1, 5\}$.

b) Dziedzina: $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{2\}$. Zapisujemy równanie w postaci alternatywy równań $\frac{3x-1}{2-x} = 2$ lub $\frac{3x-1}{2-x} = -2$. Otrzymujemy zbiór rozwiązań równania $\{-3, 1\}$.

c) Dziedzina: $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-2, 0\}$.
Rozpatrzymy dwa przypadki.
1) Jeśli $x < -2$, to równanie ma poniższą postać.

$\frac{x}{-x-2} = 2 - \frac{1}{x} \quad | \cdot (-x-2)x$ Mnożymy przez wspólny mianownik wyrażeń.

$3x^2 + 3x - 2 = 0$

Zbiór rozwiązań tego równania to $\left\{\frac{-3-\sqrt{33}}{6}, \frac{-3+\sqrt{33}}{6}\right\}$. Obie liczby nie spełniają warunku $x < -2$, zatem nie należą do zbioru rozwiązań wyjściowego równania.

2) Jeśli $x > -2$ (bo $x \neq -2$) i $x \neq 0$, to równanie ma poniższą postać.

$\frac{x}{x+2} = 2 - \frac{1}{x} \quad | \cdot (x+2)x$ Mnożymy przez wspólny mianownik wyrażeń.

$-x^2 - 3x + 2 = 0$

Zbiór rozwiązań tego równania to $\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$. Warunek $x > -2$ spełnia tylko liczba $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Równanie $\frac{x}{|x+2|} = 2 - \frac{1}{x}$ ma jedno rozwiązanie, jest nim liczba $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

ĆWICZENIE 6.

Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{|4x-1|} = \frac{2}{3}$ b) $\left|\frac{2x-1}{3-4x}\right| = 5$

c) $\frac{1}{|3-2x|-2} = 1$ d) $\frac{1}{x-5} + 6 = \frac{|6-x|}{x-5}$

ZADANIA

1. Wskaż równanie, którego pierwiastkami są liczby 0, 2, 3.

A. $\frac{(x-2)(x-3)}{x} = 0$ **B.** $\frac{x(x+2)(x+3)}{(x-2)^2} = 0$

C. $\frac{x^2(x-2)(x-3)}{3x+2} = 0$ **D.** $\frac{x(x-2)(x-3)}{x^2-6x+9} = 0$

2. Wskaż zbiór rozwiązań równania $\frac{4x(x+3)(x-4)(x-6)}{x^7+x} = 0$.

A. $\{-3, 4, 6\}$ **B.** $\{-3, 0, 4, 6\}$

C. $\{-6, -4, 3\}$ **D.** $\{-6, -4, 0, 3\}$

3. Sprawdź, czy liczba p spełnia równanie.

a) $\frac{x}{x-5} = \frac{x-3}{x+2},\ p = \frac{3}{2}$

b) $\frac{x^3 + 2x^2 - 15x}{x^2 - 6x + 9} = 0,\ p = \sqrt{3}$

c) $\frac{x+3}{x-2} = \frac{2x+1}{x-1},\ p = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$

d) $\frac{3x^2 - 1}{x} = 3x,\ p = 0$

4. Rozwiąż równanie. Zapisz, dla jakich x nie ma ono sensu liczbowego.

a) $\frac{5}{2x} = \frac{3}{5x}$

b) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{x-2}$

c) $\frac{x-3}{x+2} = -x + 1$

d) $\frac{x}{2} = \frac{3}{x} + \frac{x-1}{2}$

5. Rozwiąż równanie. Zapisz, dla jakich liczb rzeczywistych ma ono sens liczbowy.

a) $\frac{x+5}{3x-6} - \frac{2x-3}{2x-4} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{x^2+17}{x^2-1} - \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{x-1} = 0$

c) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{6}{x+2}$

d) $2 - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x-3}$

6. Rozwiąż równanie. Wprowadź pomocniczą niewiadomą.

a) $\left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{6}{x}\right) = 35$

b) $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 10 = 0$

7. Rozwiąż równanie.

a) $\left|\frac{3}{x-1}\right| = \left|\frac{1}{x+1}\right|$

b) $\left|\frac{1}{x^2 - 5x + 6}\right| = \frac{1}{2}$

BANK ZADAŃ z. 104–108 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wskaż równanie, które spełnia liczba -2.

A. $\frac{x+2}{3x} = \frac{2}{x}$ **B.** $\frac{x^2-4}{x} = 0$ **C.** $\frac{x-2}{3} = \frac{x^2-1}{x-2}$ **D.** $\frac{x}{3} = \frac{x+2}{x}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{2x+3}{x+2}$ b) $\frac{5}{x} = \frac{-x}{2x+2}$ c) $\frac{7}{x+1} + \frac{x+4}{2x-2} = \frac{3x^2-38}{x^2-1}$

3. Ułóż równanie wymierne, którego zbiorem rozwiązań jest zbiór $\{-2, 1, 3\}$.

4. Ułóż równanie wymierne, którego dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R} \setminus \{-1, 0, 4\}$ oraz

a) zbiorem rozwiązań jest zbiór $\{-3, 1\}$,

b) równanie nie ma rozwiązań.