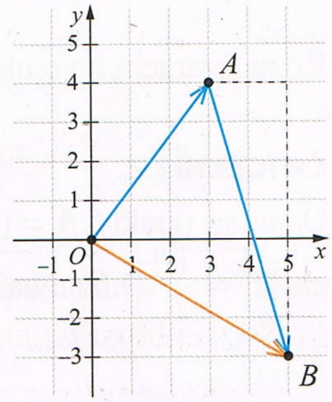
4.4 Działania na wektorach w układzie współrzędnych

R

PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy w układzie współrzędnych sumę dwóch wektorów $\vec{v} = [3, 4]$, $\vec{w} = [2, -7]$.

Zaczepiamy wektor $\vec{v}$ w początku układu współrzędnych. Końcem wektora $\vec{v}$ jest punkt $A = (3, 4)$, czyli $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. W punkcie A zaczepiamy wektor równy wektorowi $\vec{w}$. Końcem wektora $\vec{w}$ jest punkt $B = (5, -3)$, czyli $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$. Wynikiem działania $\vec{v} + \vec{w}$ jest wektor $\overrightarrow{OB} = [5, -3]$, czyli $\vec{v} + \vec{w} = [5, -3]$. Zauważmy, że współrzędne wektora $\overrightarrow{OB}$ są sumami odpowiednich współrzędnych wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$.



Twierdzenie

Jeżeli $\vec{v} = [v_x, v_y]$ i $\vec{w} = [w_x, w_y]$, to $\vec{v} + \vec{w} = [v_x + w_x, v_y + w_y]$.

Twierdzenie

Jeżeli $\vec{v} = [v_x, v_y]$, to wektor $a\vec{v} = [av_x, av_y]$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

PRZYKŁAD 2.

Dane są wektory $\vec{v} = [2, -3]$ i $\vec{w} = [-5, 1]$. Wyznaczmy współrzędne wektora:

a) $\vec{v} + \vec{w}$, b) $4\vec{v}$, c) $3\vec{v} - 2\vec{w}$.

a) $\vec{v} + \vec{w} = [2, -3] + [-5, 1] = [2 + (-5), -3 + 1] = [-3, -2]$

b) $4\vec{v} = 4 \cdot [2, -3] = [4 \cdot 2, 4 \cdot (-3)] = [8, -12]$

c) $3\vec{v} - 2\vec{w} = 3 \cdot [2, -3] - 2 \cdot [-5, 1] = [6, -9] - [-10, 2] = [16, -11]$

ĆWICZENIE 1.

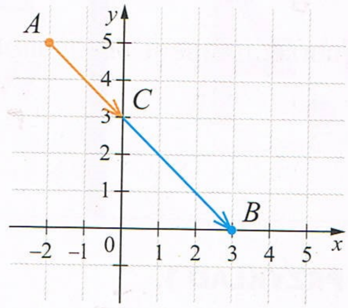
Dane są wektory $\vec{a} = [2, 3]$, $\vec{b} = [-7, 1]$ i $\vec{c} = [0, -4]$. Wyznacz współrzędne wektora:

a) $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, b) $-\vec{a} + 5(\vec{b} + 3\vec{c})$.

R

PRZYKŁAD 3.

Dane są punkty $A = (-2, 5)$ i $B = (3, 0)$. Wyznaczmy współrzędne takiego punktu C, że $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.



Zastanówmy się, jak rozwiązać ten problem w układzie współrzędnych.

Obliczamy $\overrightarrow{AB} = [3 - (-2),\ 0 - 5] = [5,\ -5]$, a następnie $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = [2,\ -2]$. Przyjmijmy, że $C = (x_C,\ y_C)$. Wtedy $\overrightarrow{AC} = [x_C - (-2),\ y_C - 5] = [x_C + 2,\ y_C - 5]$.

Z równości wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ wynika równość ich współrzędnych $\begin{cases} x_C + 2 = 2 \\ y_C - 5 = -2 \end{cases}$.

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $(0, 3)$, czyli $C = (0, 3)$.

ĆWICZENIE 2.

Dane są punkty $A = (4, -2)$ i $B = (-6, -4)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu C, że $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Zauważ, że punkt C jest środkiem odcinka AB.

Twierdzenie

Środkiem odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A,\ y_A)$ i $B = (x_B,\ y_B)$ jest taki punkt $S = (x_S,\ y_S)$, że:

$$\begin{cases} x_S = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\[2mm] y_S = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

PRZYKŁAD 4.

Dane są wektory $\vec{w} = [6, -7]$ i $\vec{w} + \vec{v} = [4, 3]$. Wyznaczmy długość wektora $\vec{w} - \vec{v}$.

Niech $\vec{v} = [v_x,\ v_y]$, wtedy $[6 + v_x,\ -7 + v_y] = [4, 3]$. Stąd $\vec{v} = [-2, 10]$.

Wyznaczmy współrzędne wektora $\vec{w} - \vec{v}$, a następnie obliczmy jego długość.

$\vec{w} - \vec{v} = [6 - (-2),\ -7 - 10] = [8,\ -17]$

$|\vec{w} - \vec{v}| = \sqrt{8^2 + (-17)^2} = \sqrt{353}$

ĆWICZENIE 3.

W trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (-3, 5)$, $B = (7, -1)$ i $C = (1, 5)$ wpisano trójkąt KLM, którego wierzchołki są środkami boków trójkąta ABC. Wyznacz:

a) współrzędne wierzchołków trójkąta KLM,

b) obwód trójkąta KLM.

R

ZADANIA

1. Dane są wektory $\vec{v} = [8, -2]$, $\vec{w} = [-3, -5]$, $\vec{u} = [1, 0]$. Wyznacz:
a) $\vec{v} + \vec{w}$, b) $-5\vec{u}$, c) $7\vec{v} + 2\vec{w}$, d) $-3\vec{v} - 5\vec{w} + 5\vec{u}$.

2. Dane są punkty $A = (-1, 3)$, $B = (1, 5)$, $C = (-7, 0)$. Wyznacz:
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, b) $|\overrightarrow{AB}|$, c) obwód trójkąta ABC.

3. Wyznacz współrzędne wektora $\vec{u}$ tak, aby był spełniony warunek:
a) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = \vec{O}$, gdy $\vec{v} = [-2, 1]$ i $\vec{w} = [2, -1]$,
b) $\vec{v} + 3\vec{w} + 2\vec{u} = 2\vec{v}$, gdy $\vec{v} = [0, 2]$, $\vec{w} = [3, 2]$.

4. Dane są wektory $\vec{v} = [-1, 3]$ i $\vec{w} = [2, -6]$. Znajdź taką liczbę k, że $\vec{v} = k\vec{w}$.

5. Czy istnieje taka liczba k, dla której $\vec{v} = k\vec{w}$, jeśli $\vec{v} = [4, -5]$ i $\vec{w} = [2, -3]$?

6. Trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnej a umieszczono na płaszczyźnie tak, że jego przyprostokątne zawierają się w osiach układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie. Uwzględnij wszystkie możliwe przypadki.

BANK ZADAŃ z. 212–214 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli wiesz, że $\overrightarrow{AB} = 3\vec{v} - \vec{w} + 2\vec{u}$, gdzie $\vec{v} = [-2, 3]$, $\vec{w} = [2, -1]$, $\vec{u} = [0, -4]$.

2. Na odcinku o końcach $A = (-2, 1)$ i $B = (4, 3)$ obrano takie punkty P i Q, że $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$. Wyznacz współrzędne punktów P i Q.

3. Trójkąt równoboczny ABC o boku długości a umieszczono na płaszczyźnie tak, że jeden jego wierzchołek jest początkiem układu współrzędnych, a drugi należy do osi x. Wyznacz współrzędne środka okręgu wpisanego w ten trójkąt. Uwzględnij wszystkie możliwe przypadki.

PROJEKT

W układzie współrzędnych dany jest wektor $\vec{v} = [n, n + 2]$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.
a) Narysuj dwa różne wektory prostopadłe do wektora $\vec{v}$.
b) Zapisz współrzędne każdego z wektorów prostopadłych.
c) Co można powiedzieć o współrzędnych wektora prostopadłego? Uzasadnij odpowiedź.