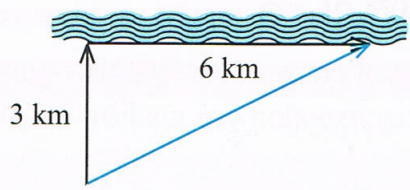
R

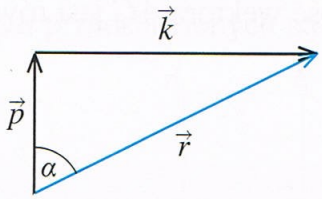
4.3 Działania na wektorach na płaszczyźnie

PRZYKŁAD 1.

Karol i Bartek zaplanowali wspólny biwak. Wyruszyli z tego samego miejsca, lecz każdy z nich postanowił przybyć na miejsce noclegu inną drogą i w inny sposób. Karol dotarł pieszo do przystani nad rzeką, a następnie podróżował kajakiem. Droga do przystani wynosiła 3 km i prowadziła na północ. Kajakiem przepłynął 6 km w kierunku wschodnim. Bartek natomiast na miejsce biwaku przyjechał bezpośrednio rowerem. Jaką drogę przejechał Bartek?

Przedstawmy powyższą sytuację na rysunku i opiszmy ją za pomocą wektorów.



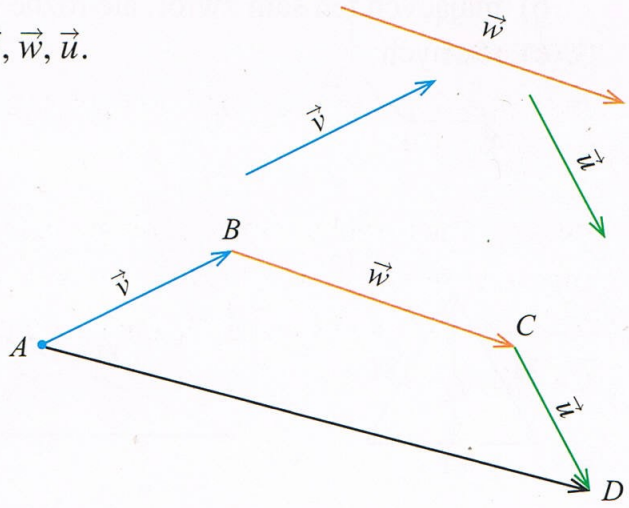


Przyjmijmy następujące oznaczenia:
$\vec{p}$ – droga Karola pokonana pieszo,
$\vec{k}$ – droga Karola pokonana kajakiem,
$\vec{r}$ – droga, którą Bartek przejechał rowerem,
O wektorach $\vec{p}, \vec{k}, \vec{r}$ napiszemy, że $\vec{p} + \vec{k} = \vec{r}$.
Długość drogi, jaką pokonał Bartek, możemy obliczyć za pomocą twierdzenia Pitagorasa.
$|\vec{r}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{k}|^2$, $|\vec{r}| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}7$ [km]
Bartek przejechał rowerem około 6,7 km.

PRZYKŁAD 2.

Opiszmy dodawanie dowolnych wektorów $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$.

W dowolnym punkcie A na płaszczyźnie zaczepiamy wektor równy wektorowi $\vec{v}$. Wektor $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Koniec wektora $\overrightarrow{AB}$ musi być początkiem wektora równego wektorowi $\vec{w}$. Stąd $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$. Wektor $\vec{u}$ zaczepiamy tak, żeby jego początkiem był punkt C. Stąd wektor $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$. Wektor $\overrightarrow{AD}$ jest sumą wektorów $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$, czyli $\overrightarrow{AD} = \vec{v} + \vec{w} + \vec{u}$.

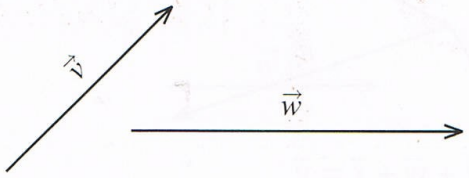


ĆWICZENIE 1.

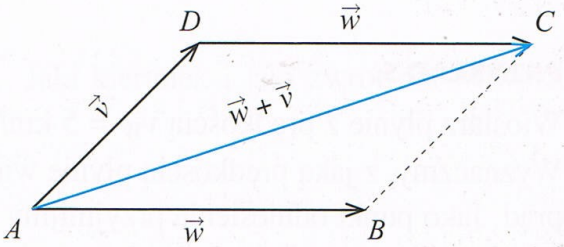
W równoległoboku $ABCD$ punkt O jest punktem przecięcia przekątnych. Wyznacz sumy wektorów $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

PRZYKŁAD 3.

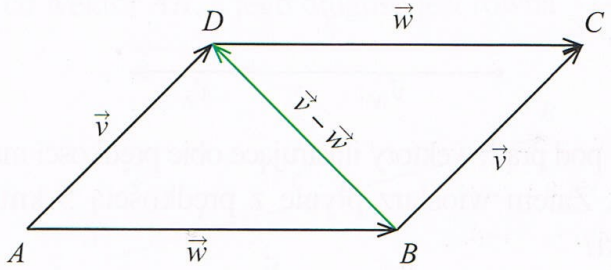
Dane są wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Wyznaczmy ich:
a) sumę, b) różnicę.



a) Zauważmy, że dwa niezerowe i nierównoległe wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zaczepione w jednym punkcie wyznaczają równoległobok $ABCD$. Ich suma $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, czyli jest wektorem wyznaczonym przez końce przekątnej AC.



b) Zauważmy, że różnicę wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ możemy zapisać jako sumę wektora $\vec{v}$ i wektora przeciwnego do wektora $\vec{w}$. Ponieważ $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ oraz $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, więc $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$.

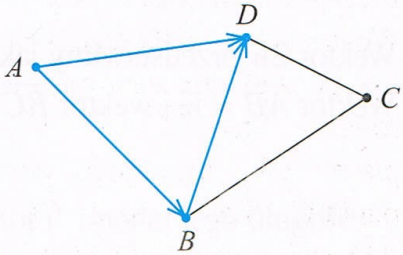


Popatrzmy na równoległobok $ABCD$ wyznaczony przez wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Sumę wektorów wyznaczają końce przekątnej AC równoległoboku, czyli $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$, a różnicę – końce przekątnej BD, $\vec{v} - \vec{w} = \overrightarrow{BD}$. Taki sposób dodawania dwóch wektorów, jaki przedstawiono w punktach a i b, nazywamy **metodą równoległoboku**.

PRZYKŁAD 4.

Punkty A, B, C, D są wierzchołkami pewnego czworokąta. Uzasadnijmy, że $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$.

Zaznaczmy na rysunku odpowiednie wektory.
Zauważmy, że wektor $-\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB}$, mamy więc $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$. Zatem uzasadniliśmy, że $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$.

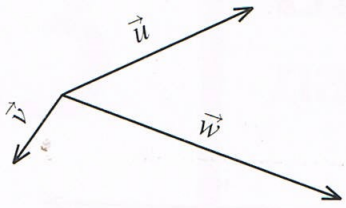


R

ĆWICZENIE 2.

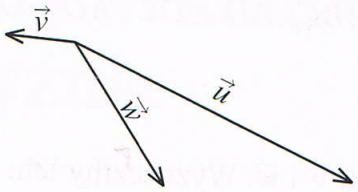
Wyznacz brakujący wektor $\vec{x}$ tak, aby spełniony był warunek:

a)



$\vec{u} + \vec{w} + \vec{x} = \vec{v}$

b)



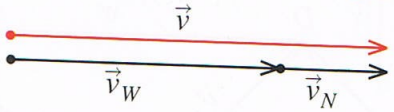
$\vec{w} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{u}$

PRZYKŁAD 5.

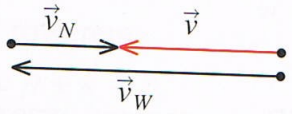
Wioślarz płynie z prędkością $v_W = 5$ km/h. Prędkość nurtu rzeki jest równa $v_N = 2$ km/h. Wyznaczmy, z jaką prędkością płynie wioślarz z prądem rzeki, a z jaką prędkością – pod prąd. Jako punkt odniesienia przyjmijmy brzeg rzeki.

W celu rozwiązania tego problemu posłużymy się wektorami. Przedstawmy graficznie obie sytuacje.

1) Jeśli wioślarz płynie z prądem rzeki, to oba wektory – prędkość nurtu i prędkość wioślarza – mają ten sam kierunek i ten sam zwrot. Zatem prędkość, z jaką rzeczywiście płynie wioślarz, wynosi 2 km/h + 5 km/h = 7 km/h względem brzegu rzeki.



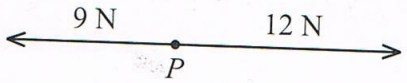
2) Gdy wioślarz płynie pod prąd, wektory ilustrujące obie prędkości mają takie same kierunki, ale przeciwne zwroty. Zatem wioślarz płynie z prędkością 5 km/h – 2 km/h = 3 km/h względem brzegu rzeki.



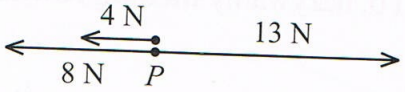
ĆWICZENIE 3.

Określ rezultat działania sił na punkt P.

a)

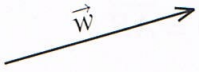


b)

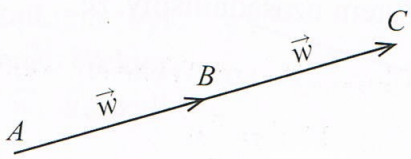


PRZYKŁAD 6.

Dany jest wektor $\vec{w}$. Wyznaczmy wektor $2\vec{w}$.



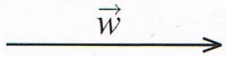
Wektor $2\vec{w}$ przedstawimy jako sumę $\vec{w} + \vec{w} = 2\vec{w}$.
Wektor $\overrightarrow{AB} = \vec{w}$ i wektor $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$. Wektor $\overrightarrow{AC} = 2\vec{w}$.



Analogicznie wyznaczymy wektory $3\vec{w}, 4\vec{w}, \ldots, n\vec{w}$, gdy n jest liczbą naturalną dodatnią. Wektor $n\vec{w}$, gdy $n \in N_+$, ma ten sam kierunek i zwrot co wektor $\vec{w}$. Długość wektora $n\vec{w}$ jest równa $n|\vec{w}|$.

ĆWICZENIE 4.

Dany jest wektor $\vec{w}$. Wyznacz wektor:



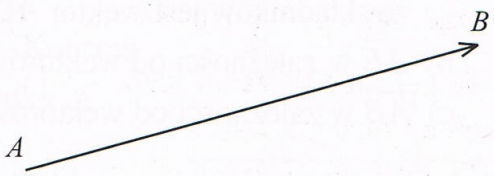
a) $4\vec{w}$, b) $-3\vec{w}$.

ĆWICZENIE 5.

Opisz, jak wyznaczyć wektor $n\vec{w}$, gdy $n \in C_-$. Jaki kierunek i jaki zwrot ma wówczas wektor $n\vec{w}$? Jaką długość ma wektor $n\vec{w}$?

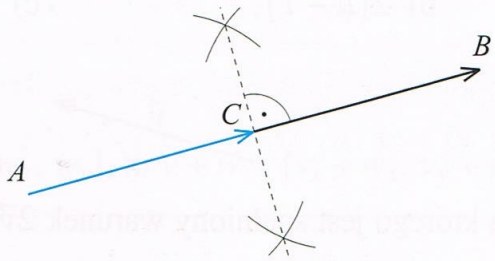
PRZYKŁAD 7.

Dany jest wektor $\overrightarrow{AB}$. Wyznaczmy wektory:

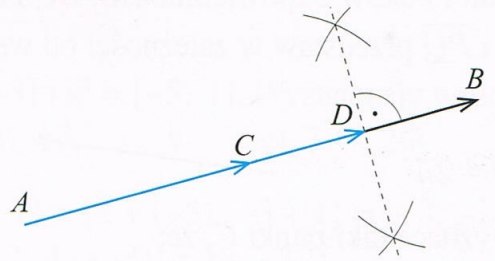


a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, b) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

a) Wyznaczmy punkt C poprzez narysowanie symetralnej odcinka AB. Wektor $\overrightarrow{AC}$ ma ten sam kierunek i zwrot co wektor $\overrightarrow{AB}$, a jego długość jest równa $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.



b) Wyznaczmy taki punkt D, że $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Pierwszym krokiem będzie powtórzenie czynności z punktu a. Następnie rysujemy symetralną odcinka CB i otrzymujemy punkt D. Wektor $\overrightarrow{AD}$ ma ten sam kierunek i zwrot co wektor $\overrightarrow{AB}$, a jego długość jest równa $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.



ĆWICZENIE 6.

Narysuj dowolny wektor $\vec{w}$ o długości 6 cm. Wyznacz wektor $\vec{v}$ i podaj jego długość.

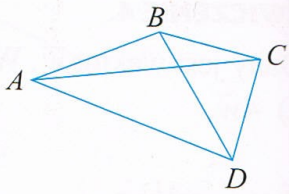
a) $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{w}$ b) $\vec{v} = \frac{5}{4}\vec{w}$

R

ZADANIA

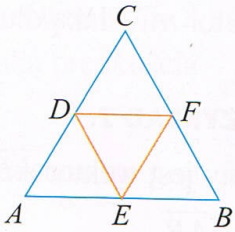
1. Punkty A, B, C, D są wierzchołkami czworokąta przedstawionego na rysunku. Podaj nazwę wektora będącego wynikiem opisanego działania.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$
c) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$
d) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$
e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
f) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$



2. Trójkąty ABC i DEF są takimi trójkątami równobocznymi, że $DF||AB$.
Wyznacz wektor:

a) $\overrightarrow{AF}$ za pomocą wektorów, wśród których jednym ze składników jest wektor $\overrightarrow{AC}$,
b) $\overrightarrow{AE}$ w zależności od wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$,
c) $\overrightarrow{AB}$ w zależności od wektorów $\overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{EC}$.



3. Dane są wektory $\vec{t}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
Wyznacz wektor:

a) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} + \vec{t}$,
b) $2(\vec{u} - \vec{t})$,
c) $2\vec{u} - 2\vec{t}$.

4. Dane są wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$.

Znajdź taki wektor $\vec{t}$, dla którego jest spełniony warunek $2\vec{v} + \vec{u} + \vec{t} = \vec{O}$.

BANK ZADAŃ z. 209–211 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Punkty P, Q, R są środkami boków odpowiednio AB, BC i AC trójkąta równobocznego ABC. Wektory $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{PQ}$ przedstaw w zależności od wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.

2. Dane są wektory $\vec{v}, \vec{u}$.
Wyznacz wektor $\vec{t} = 3\vec{v} - 2\vec{u}$.

3. Dany jest wektor $\overrightarrow{AB}$. Wyznacz taki punkt C, że:

a) $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,
b) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.