3.3 Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych wykonujemy analogicznie jak dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych. Jeśli:

- wielomiany w mianownikach wyrażeń są takie same, to mianowniki pozostawiamy bez zmian i działania wykonujemy na licznikach,
- w mianowniku są różne wielomiany, to wykonywanie działań rozpoczynamy od sprowadzenia wyrażeń do wspólnego mianownika.

PRZYKŁAD 1.

Wyrażenie wymierne $\frac{x-2}{x}$ przedstawmy jako wyrażenie o mianowniku:

a) $3x^2$, b) $x(2x-3y)$.

Rozszerzamy wyrażenia wymierne.

a) $\frac{x-2}{x} = \frac{x-2}{x} \cdot \frac{3x}{3x} = \frac{3x(x-2)}{3x^2} = \frac{3x^2-6x}{3x^2}$. Dziedzina: $x \neq 0$.

b) $\frac{x-2}{x} = \frac{x-2}{x} \cdot \frac{2x-3y}{2x-3y} = \frac{(x-2)(2x-3y)}{x(2x-3y)} = \frac{2x^2-3xy-4x+6y}{x(2x-3y)}$. Dziedzina: $x \neq 0$ i $x \neq \frac{3}{2}y$.

PRZYKŁAD 2.

Wykonajmy działania.

a) $\frac{4}{3x} - \frac{7x}{6}$ b) $\frac{3}{8a} + \frac{5}{12a^2}$ c) $\frac{3y}{x} + \frac{7x}{y^2} - \frac{2x+1}{4y}$

a) Wspólnym mianownikiem jest wielomian $6x$.

$\frac{4}{3x} - \frac{7x}{6} = \frac{4}{3x} \cdot \frac{2}{2} - \frac{7x}{6} \cdot \frac{x}{x} = \frac{8}{6x} - \frac{7x^2}{6x} = \frac{8-7x^2}{6x}$. Dziedzina: $x \neq 0$.

b) Wspólnym mianownikiem jest wielomian $24a^2$.

$\frac{3}{8a} + \frac{5}{12a^2} = \frac{3}{8a} \cdot \frac{3a}{3a} + \frac{5}{12a^2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{9a}{24a^2} + \frac{10}{24a^2} = \frac{9a+10}{24a^2}$. Dziedzina: $a \neq 0$.

c) Wspólnym mianownikiem jest wielomian $4xy^2$.

$\frac{3y}{x} + \frac{7x}{y^2} - \frac{2x+1}{4y} = \frac{3y}{x} \cdot \frac{4y^2}{4y^2} + \frac{7x}{y^2} \cdot \frac{4x}{4x} - \frac{2x+1}{4y} \cdot \frac{xy}{xy} = \frac{12y^3}{4xy^2} + \frac{28x^2}{4xy^2} - \frac{xy(2x+1)}{4xy^2} =$

$= \frac{12y^3+28x^2-2x^2y-xy}{4xy^2}$. Dziedzina: $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

ĆWICZENIE 1.

Wykonaj działania. Zapisz konieczne założenia.

a) $\frac{2}{x} - \frac{5}{x}$ b) $\frac{16a}{5b^2} + \frac{11a}{5a^2}$ c) $\frac{2a}{3} + \frac{4}{5a}$ d) $\frac{a+2}{3a} - \frac{2a-5}{2a}$

PRZYKŁAD 3.

Wykonajmy dodawanie $\frac{a+3}{a^2-a-2}+\frac{a^2-3a-5}{a^2+a-6}$.

Możemy jako wspólny mianownik przyjąć iloczyn mianowników $(a^2-a-2)(a^2+a-6)$. Najpierw sprawdzimy jednak, czy wielomiany występujące w mianowniku mają w rozkładzie na czynniki wspólny czynnik.

$$\frac{a+3}{a^2-a-2}+\frac{a^2-3a-5}{a^2+a-6}=\frac{a+3}{(a-2)(a+1)}+\frac{a^2-3a-5}{(a+3)(a-2)}$$

Wyrażenie ma sens liczbowy wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{-3, -1, 2\}$.

Zauważmy, że najmniejszym wspólnym mianownikiem będzie wielomian $(a-2)(a+1)(a+3)$.

$$\frac{a+3}{a^2-a-2}+\frac{a^2-3a-5}{a^2+a-6}=\frac{(a+3)(a+3)}{(a-2)(a+1)(a+3)}+\frac{(a^2-3a-5)(a+1)}{(a+3)(a-2)(a+1)}=$$

$$=\frac{a^2+6a+9}{(a-2)(a+1)(a+3)}+\frac{a^3+a^2-3a^2-3a-5a-5}{(a+3)(a-2)(a+1)}=\frac{a^3-a^2-2a+4}{(a+3)(a+1)(a-2)}$$

Sprawdzamy, czy można skrócić to wyrażenie. Żadna z liczb całkowitych $-3, -1, 2$ nie jest pierwiastkiem wielomianu z licznika, co oznacza, że nie skrócimy otrzymanego wyrażenia.

Sprowadzanie do wspólnego mianownika wyrażeń wymiernych warto rozpocząć od rozłożenia wielomianów występujących w mianowniku na czynniki. Następnie należy ustalić dziedzinę wyrażeń wymiernych. Wspólny mianownik jest iloczynem czynników występujących w mianowniku pierwszego wyrażenia i czynników występujących w mianowniku drugiego wyrażenia, o ile nie występowały w mianowniku wyrażenia pierwszego.

ĆWICZENIE 2.

Wykonaj działania. Zapisz konieczne założenia.

a) $\frac{4x+1}{x+3}+\frac{x-6}{x^2-9}$ b) $\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x^2+x-2}$ c) $\frac{8x-3}{x^2-7x+12}-\frac{2x+1}{x-4}$

PRZYKŁAD 4.

Wykonajmy działania $\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{a^2-x^2}\right)\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$.

Rozkładamy wielomiany występujące w mianownikach na czynniki i ustalamy warunki, dla których wyrażenia mają sens liczbowy.

$$\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{a^2-x^2}\right)\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{(a-x)(a+x)}\right)\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}-\frac{2ax}{(a-x)(a+x)}\right)$$

Wyrażenia mają sens liczbowy, gdy $a \neq -x$ i $a \neq x$.

Wykonujemy działania zgodnie z obowiązującymi prawami, najpierw te, które są zapisane w nawiasach. Rozpoczynamy od ustalenia wspólnego mianownika.

$$\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{(a-x)(a+x)}\right)\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}-\frac{2ax}{(a-x)(a+x)}\right)=$$

$$=\left(\frac{5a(a-x)}{(a+x)(a-x)}+\frac{5x(a+x)}{(a-x)(a+x)}+\frac{10ax}{(a-x)(a+x)}\right)\left(\frac{a(a-x)}{(a+x)(a-x)}+\frac{x(a+x)}{(a-x)(a+x)}-\frac{2ax}{(a-x)(a+x)}\right)=$$

$$=\frac{5a^2-5ax+5ax+5x^2+10ax}{(a+x)(a-x)}\cdot\frac{a^2-ax+ax+x^2-2ax}{(a+x)(a-x)}=\frac{5a^2+5x^2+10ax}{(a+x)(a-x)}\cdot\frac{a^2+x^2-2ax}{(a+x)(a-x)}=$$

$$=\frac{5(a^2+2ax+x^2)}{(a+x)(a-x)}\cdot\frac{a^2-2ax+x^2}{(a+x)(a-x)}=\frac{5(a+x)^{\cancel{2}1}}{{}_1\cancel{(a+x)}(a-x)}\cdot\frac{(a-x)^{\cancel{2}1}}{(a+x)\cancel{(a-x)}_1}=\frac{5\cancel{(a+x)}^1}{\cancel{a-x}_1}\cdot\frac{\cancel{a-x}^1}{\cancel{a+x}_1}=5$$

ĆWICZENIE 3.

Wykonaj działania.

a) $\left(\frac{3a}{1-3a}+\frac{2a}{3a+1}\right):\frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$

b) $(a^2-1)\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}-1\right)$

c) $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}\right)$

d) $\left(\frac{y}{x^2-xy}+\frac{x}{y^2-xy}\right)\cdot\frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}$

ZADANIA

1. Zapisano konieczne założenia i wykonano działania $\frac{4}{2x+x^2}+\frac{4x^2-4}{2x^2+4x}$. Które z poniższych wyrażeń można było uzyskać? Wskaż poprawne odpowiedzi.

A. $\frac{2}{x+2}$, $x\neq-2$ i $x\neq0$

B. $\frac{2x^2+2}{x(x+2)}$, $x\neq-2$ i $x\neq0$

C. $\frac{2(x^2+1)}{x^2+2x}$, $x\neq-2$ i $x\neq0$

D. $\frac{4}{2x^3}$, $x\neq-2$ i $x\neq0$

2. Wykonaj działania.

a) $\frac{x-3}{x+5}+\frac{x+7}{x+2}$

b) $\frac{4}{x-3}-\frac{2}{x+1}$

c) $x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}$

d) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

3. Niech $a=\frac{1}{x}$ i $b=\frac{1}{y}$. Każde wyrażenie wymierne zapisz jako wyrażenie zmiennych x i y.

a) a^2-b^2

b) $\frac{a-b}{a+b}$

c) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$

d) $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$

4. Wyznacz wskazane zmienne w podanym wzorze.

a) $\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, f, q

b) $\frac{1}{R}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$, r, s

c) $R=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$, r_1, r_2

d) $t=\frac{2dV}{V^2-w^2}$, V, w

5. Wykonaj działania.

a) $\left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{a+x}\right):\left(\frac{x+a}{a}-\frac{x-a}{x}\right)$

b) $\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}\right)\left(1-\frac{a}{x}\right)\cdot\frac{x^3}{a^3-x^3}$

c) $\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):(a+b)+a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]:\frac{1+a}{b}$

d) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

6. Znajdź wartość wyrażenia $x^2+\frac{1}{x^2}$, jeśli $x+\frac{1}{x}=3$.

7. Przeprowadź analizę kolejnych przekształceń poniższego równania i wskaż błąd, który doprowadził do absurdu następujące rozumowanie:
Dane jest równanie $6x-14=15x-35$. *Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias*: $2(3x-7)=5(3x-7)$. *Dzielimy równanie stronami przez* $3x-7$:
$\frac{2(3x-7)}{3x-7}=\frac{5(3x-7)}{3x-7}$. *Skracamy i otrzymujemy równość*: $2=5$.

8. Uzasadnij, że zachodzi równość $\frac{9x+9}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{3}{(x+2)^2}-\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x-1}$.

BANK ZADAŃ z. 102–103 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wynikiem działania $\frac{5x}{3y}+\frac{2y}{3x}$ jest

A. $\frac{5x^2+2y^2}{3xy}$ **B.** $\frac{5x+2y}{3xy}$ **C.** $\frac{5x+3y}{9xy}$ **D.** $\frac{15x^2+6y^2}{3xy}$

2. Uzupełnij licznik lub mianownik wyrażenia wymiernego tak, aby była prawdziwa równość:

a) $\frac{a-2}{a+2}=\frac{}{4-a^2}$, b) $\frac{3}{b+2}=\frac{3b+6}{}$, c) $\frac{c-1}{c+3}=\frac{}{c^2-c-12}$.

3. Wykonaj działania. Zapisz konieczne założenia.

a) $\frac{4}{x+3}-\frac{2x}{x-1}$

b) $\frac{6t}{t^2-9}-\frac{2}{t-3}+\frac{3}{t+3}$

c) $\frac{3}{2x-5}-\frac{4}{4x^2-20x+25}$

d) $\frac{3}{(y+2)^2}-\frac{4}{y^2-4}-\frac{1}{y^2-4y+4}$

4. Zapisz wyrażenie jako sumę lub różnicę wyrażeń wymiernych.

a) $\frac{12a-b}{3ab}$ b) $\frac{a^2+ab}{2ab^2}$ c) $\frac{3a^3-4a^2+5a-7}{a^5}$

5. Wykonaj działania, a następnie oblicz wartość wyrażenia dla $x=-2\frac{1}{2}$.

$6x+\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right):\frac{4x}{x^4-2x^3+8x-16}$