3.1 Wyrażenie wymierne

Definicja

Wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{f}{g}$, gdzie f i g są wielomianami i g nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **wyrażeniem wymiernym**.

Wyrażeniami wymiernymi są np. $\frac{x+2}{5}$, $\frac{x^3-2y^2}{z^4+11}$, $\frac{-m}{3p+2}$, $\frac{4t-1}{1}$.

ĆWICZENIE 1.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2x^2+3xy-y^2}{x^2+y}$ dla:

a) $x = 0$ i $y = -2$, b) $x = 2\sqrt{3}$ i $y = -\frac{1}{2}$, c) $x = 2-\sqrt{3}$ i $y = \sqrt{2}$.

Definicja

Dziedziną wyrażenia wymiernego jest zbiór liczb rzeczywistych, dla których to wyrażenie ma sens liczbowy.
Dziedziną wyrażenia wymiernego jednej zmiennej $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest zbiór tych x, dla których $g(x) \neq 0$.

Gdy zapisujemy wyrażenie wymierne, zawsze staramy się podać jego dziedzinę lub warunki, przy których ma ono sens liczbowy.

PRZYKŁAD 1.

Wyznaczmy dziedzinę wyrażenia wymiernego.

a) $\frac{x^2+3x+12}{3x-5}$ b) $\frac{x^2-17}{(x+3)(x-7)}$ c) $\frac{9-3x}{x^2+2x-35}$

a) Sprawdzamy, dla jakich wartości zmiennej mianownik wyrażenia jest równy zero.
$3x-5=0$, gdy $x = \frac{5}{3}$.
Zatem dziedziną wyrażenia jest zbiór $\boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$, jego elementami są liczby $x \neq \frac{5}{3}$.

b) $(x+3)(x-7)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x+3=0$ lub $x-7=0$, czyli $x=-3$ lub $x=7$.

Zatem dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R}\setminus\{-3, 7\}$, jego elementami są liczby $x \neq -3$ i $x \neq 7$.

c) Szukamy miejsc zerowych mianownika.

$x^2+2x-15=0$

$\Delta = 64$, stąd $x_1=-5$, $x_2=3$.

Zatem dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbf{R}\setminus\{-5, 3\}$, jego elementami są liczby $x \neq -5$ i $x \neq 3$.

ĆWICZENIE 2.

Wyznacz dziedzinę wyrażenia wymiernego.

a) $\frac{2}{(3x+6)(2-3x)(x-4)}$ b) $\frac{(x+3)(3-x)}{(x-3)}$ c) $\frac{3x^2+5}{x^2+4x+4}$

PRZYKŁAD 2.

Określmy warunki, dla których podane wyrażenie wymierne ma sens liczbowy.

a) $\frac{2x+3y}{4x^2+4xy+y^2}$ b) $\frac{3x-2y}{3x^3-3x^2+x-1}$ c) $\frac{a^3-b}{a^4-b^4}$

Rozkładamy wielomiany występujące w mianowniku wyrażenia na czynniki.

a) $4x^2+4xy+y^2=(2x+y)^2$

Mianownik ułamka przyjmuje wartość zero, gdy $2x=-y$ lub inaczej: gdy $x=-\frac{y}{2}$.

Zatem wyrażenie ma sens liczbowy, gdy $x \neq -\frac{y}{2}$.

b) Stosujemy metodę grupowania wyrażeń i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias.

$3x^3-3x^2+x-1=3x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(3x^2+1)$

Wyrażenie to przyjmuje wartość zero tylko dla $x=1$, drugi czynnik $3x^2+1>0$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

Zatem wyrażenie ma sens liczbowy, gdy $x \neq 1$.

c) Stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

Zatem wyrażenie ma sens liczbowy, gdy $a \neq -b$ i $a \neq b$.

ĆWICZENIE 3.

Określ warunki, dla których wyrażenie wymierne ma sens liczbowy.

a) $\frac{a-5+(a+1)(a-5)}{(a-5)(2a+3)(a^2-2)}$ b) $\frac{x^2-3xy+y}{2x^2+12xy}$ c) $\frac{ax-3x+5a}{x^3-a^3}$

Wyrażenia wymierne można skracać i rozszerzać podobnie jak ułamki zwykłe.

PRZYKŁAD 3.

Uprośćmy wyrażenie wymierne.

a) $\dfrac{x^2-2x-3}{2x-6}$ b) $\dfrac{4-4a^2}{2+4a+2a^2}$

Rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Pamiętamy o podaniu dziedziny wyrażenia wymiernego.

a) $\dfrac{x^2-2x-3}{2x-6} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{2(x-3)}$. Dziedzina: $x \neq 3$.

$\dfrac{{}^{1}\cancel{(x-3)}(x+1)}{2\cancel{(x-3)}_{1}} = \dfrac{x+1}{2}$

b) $\dfrac{4-4a^2}{2+4a+2a^2} = \dfrac{4(1-a^2)}{2(1+2a+a^2)} = \dfrac{4(1-a)(1+a)}{2(1+a)^2}$. Dziedzina: $a \neq -1$.

$\dfrac{{}^{2}\cancel{4}(1-a)\cancel{(1+a)}^{1}}{{}_{1}\cancel{2}(1+a)^{\cancel{2}1}} = \dfrac{2(1-a)}{1+a}$

Skracanie wyrażenia wymiernego jest możliwe tylko wtedy, gdy w rozkładzie na czynniki wielomianów w liczniku i mianowniku występuje ten sam czynnik.

ĆWICZENIE 4.

Wyznacz dziedzinę wyrażenia wymiernego i je uprość.

a) $\dfrac{-13x^3}{3x^3+x^2}$ b) $\dfrac{6x-3}{4-8x}$ c) $\dfrac{4a+16}{a^3+4a^2}$ d) $\dfrac{x^3+7x^2+12x}{x^2+9x+20}$

Rozszerzenie ułamka zwykłego polega na pomnożeniu jego licznika i mianownika przez tę samą liczbę różną od zera. Tak samo możemy zrobić z wyrażeniem wymiernym: rozszerzamy je poprzez pomnożenie licznika i mianownika przez ten sam wielomian.

PRZYKŁAD 4.

Rozszerzmy wyrażenie wymierne, tak aby zachodziła równość:

a) $\dfrac{4}{3xy} = \dfrac{4x^2}{\quad}$, b) $\dfrac{-2}{x+2a} = \dfrac{\quad}{x^2+2ax}$, c) $\dfrac{3+2x}{4x-3} = \dfrac{\quad}{16x^2-9}$.

a) $\dfrac{4}{3xy} = \dfrac{4 \cdot x^2}{3xy \cdot x^2} = \dfrac{4x^2}{3x^3y}$. Dziedzina: $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

b) $x^2+2ax = x(x+2a)$, zatem $\dfrac{-2}{x+2a} = \dfrac{-2x}{(x+2a)x} = \dfrac{-2x}{x^2+2ax}$. Dziedzina: $x \neq 0$ i $x \neq -2a$.

c) $16x^2-9 = (4x-3)(4x+3)$, zatem $\dfrac{3+2x}{4x-3} = \dfrac{(3+2x)(4x+3)}{(4x-3)(4x+3)} = \dfrac{8x^2+18x+9}{16x^2-9}$.

Dziedzina: $x \neq \frac{3}{4}$ i $x \neq -\frac{3}{4}$.

ĆWICZENIE 5.

Zapisz konieczne założenia i rozszerz wyrażenie wymierne, tak aby zachodziła równość:

a) $\dfrac{2x-7}{x} = \dfrac{\quad}{3xy}$, b) $\dfrac{x}{5x-3} = \dfrac{\quad}{25x^2-9}$, c) $\dfrac{2a+3b}{a+b} = \dfrac{2a^2b+3ab^2}{\quad}$.

ZADANIA

1. Wskaż wyrażenia wymierne.

A. $\frac{91x-2}{13y+3}$ **B.** $\frac{3m^4-11mn+3n^3m}{m^7-n}$ **C.** $\frac{2a^2+3\sqrt{b}}{2ab}$ **D.** $2x^2+5$

2. Oblicz wartość wyrażenia wymiernego:

a) $\frac{5x+2y}{x}$ dla $x=-3$ i $y=2$,

b) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab}$ dla $a=\sqrt{2}$ i $b=\sqrt{3}$,

c) $\frac{3x}{2x^2-5x}$ dla $x=\sqrt{3}+1$,

d) $\frac{x^2-2\sqrt{3}x-\sqrt[3]{4}+3}{x-\sqrt{3}}$ dla $x=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$.

3. Wyznacz dziedzinę wyrażenia wymiernego i je uprość.

a) $\frac{b^2-16}{b^2+4b-32}$ b) $\frac{3y^2-4y}{3y^3-16y^2+16y}$ c) $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$ d) $\frac{x^2-4xy-5y^2}{x^2+6xy+5y^2}$

4. Określ warunki, dla których wyrażenie wymierne ma sens liczbowy.

a) $\frac{12x^2y}{6xy^2-18x^3y}$ b) $\frac{3a^2-15ab}{6a^2+36ab}$ c) $\frac{8x^2-8xy+2y^2}{3x^2+6xy+3y^2}$ d) $\frac{x^2+2xy-5y^2}{x^2-5xy-5y^2}$

5. Niech $x=a+b$ oraz $y=a-b$. Każde wyrażenie wymierne zapisz jako wyrażenie zmiennych a i b.

a) $\frac{3x+6y}{9x+12y}$ b) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\frac{3x^2-8x+5}{4x^2+x-5}$ d) $\frac{x^3-8y^3}{x^2-4xy+4y^2}$

BANK ZADAŃ z. 97–99 » » »

A GDYBY SPRAWDZIAN BYŁ TERAZ?

1. Wskaż wyrażenia wymierne, które są równe wyrażeniu $\frac{b-a}{a+b}$, gdzie $a+b\neq 0$.

A. $-\frac{a-b}{a+b}$ **B.** $-\frac{b-a}{a-b}$ **C.** $-\frac{-(b-a)}{a+b}$ **D.** $-\frac{a-b}{b+a}$

2. Oblicz wartość wyrażenia wymiernego:

a) $\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}$ dla $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=-\frac{1}{4}$, $x=1$,

b) $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$ dla $a=\left(2-\sqrt{5}\right)^{-1}$ i $b=\left(2+\sqrt{5}\right)^{-1}$.

3. Wyznacz dziedzinę wyrażenia wymiernego.

a) $\frac{3x^2+7}{(x-7)(x-2)(x+3)}$ b) $\frac{4y^3-11y^2}{3y^2-18y+27}$ c) $\frac{2ab-3ac+bc}{(a^2-28)(3a^2+5a)}$

4. Uprość wyrażenie wymierne.

a) $\frac{x^2-5x+6}{2x^2-5x-3}$ b) $\frac{y^3-13y^2+39y-27}{y^3-9y^2+27y-27}$ c) $\frac{a^4-16}{(a^4+8a^2+16)(a^3-8)}$